

## 角運動量保存則を示す正しい式

New Accurate Equation for the Law of Conservation of Angular Momentum

山 田 豊  
Yutaka YAMADA

*When a board is rotated around its principal axis of inertia, parallel to the surface of the board, it will have several stable turns in zero-gravity. Then it will flip upside down and have another several stable turns. The law of conservation of angular momentum is very important to explain this phenomenon. In order to obtain accurate equation for this law, the axis with the fixed direction toward the inertial system is essential. Angular momentum will be constant for this axis. The movement of a freely rotating object depends on two rotations. One is the rotation around this axis and the other is around the axis which is vertical to the former axis. It is difficult to explain the movements of rotating object only with Euler's equation.*

### 1 緒 言

宇宙船内で、ペンチの取手を開き、先端側と取手側を結ぶ対称軸まわりに回転させると、数回転程定常回転していたのが、突然先端と取手が入れ替って倒立し、そこで数回転程回転してからまたもとの回転に戻る運動を繰り返す。この現象は、日本機械学会の特別講演により知られているが、正しい説明が無かった。そこで、1994年9月号の日本機械学会誌に、この現象について基本的な考え方を、簡単に解説した<sup>(1)</sup>。

この現象の理解は、誤り易い問題であるので、愛工大研究報告の前号(第30号B)で、多くの角度から詳細に述べた<sup>(2)</sup>。そこでは一般形状の物体を、無重力真空中で回転させた場合の倒立と振動について議論した。扱った内容が多岐にわたったため、この現象を理解する上で最も重要である角運動量保存則についての説明が簡略となった。そのため分かりにくい論文となった。自由回転する物体に対する角運動量保存則は、いずれの教科書もすべて同一の間違った式で書き表わしている<sup>(3)</sup>。そのため無重力場且つ真空中で回転する物体の運動のように、極めて単純な現象も理解され難くなっていると考えられる。そこで本論文では、角運動量保存則を示す正しい式について、多くの角度から分かり易く議論したい。

### 2 質点の運動

図1は、まず質量 $m$ の質点Pが細い糸で支えられて、固定点Oのまわりに半径 $r_1$ 、速度 $v_1$ で回転している場合を示す。固定点Oには細い糸を通す小さい穴が明けられており、この小穴を通して質点は半径 $r_1$ から $r_2$ まで引張られるものとする。質量 $m$ は一定であるので、角運動量保存則により

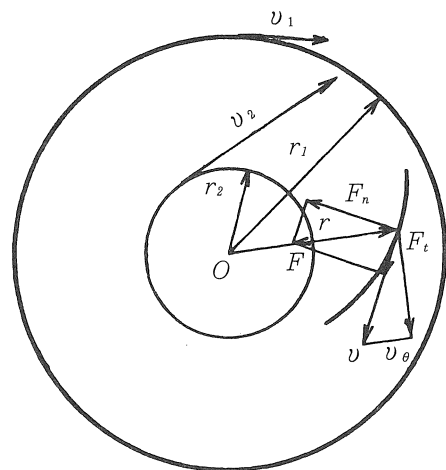


Fig. 1 A turning particle moving around the fixed point

$rv_\theta = r_1v_1 = r_2v_2 = \text{一定}$  .....(1)  
 となる。遠心力  $F = mv_\theta^2/r$  に抗して糸を引き寄せることにより、質点Pに与える仕事Wが、運動エネルギーの増加  $m(v_2^2 - v_1^2)/2$  に等しい。すなわち  $rv_\theta = C$  とすると、次式ようになる。

$$W = -m \int_{r_1}^{r_2} \frac{v_\theta^2}{r} dr$$

$$= m \left[ \frac{C^2}{2r^2} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) \text{ .....(2)}$$

一方O方向へ引張られて速度が増すのは、図のrの位置で、O方向の力Fを運動方向の力 $F_t$ と、それに直角方向の力 $F_n$ との二つの成分に分けたとき、力Fの運動方向成分 $F_t$ により、加速されるからである。rが一定で円運動する場合には、Fの運動方向成分 $F_t$ はゼロであり、Fは運動方向に対して垂直方向の力 $F_n$ と等しい。 $F_n$ は運動方向に対して垂直であるから、方向を変えるのみで、速度の大きさは一定となる。また半径 $r_1$ 、速度 $v_1$ で円運動していた場合、糸が切れると、質点は円の接線方向に $v_1$ の直線運動をする。この直線運動の場合も、固定点Oまわりの角運動量は $m r_1 v_1$ で一定である。

図2は、質点Pが速度vで運動することにより、それに取り付けられた糸が、静止した半径Rの円柱に巻き付いていく場合を示す。この場合は、運動エネルギー保存則から、vの大きさは一定である。また糸の張力は運動方向に対して垂直であるから、方向を変えるのみで質点を加速することはできない。したがってvが一定と考えることもできる。糸と円柱との接点Aまわりの角運動量Lは、質量mの質点PとAとの距離がlであるので $L = mlv$ である。無論円柱の中心O点まわりの値も同じ $mlv$ である。いま微小時間dtの間に糸が角度θだけ棒に巻き付

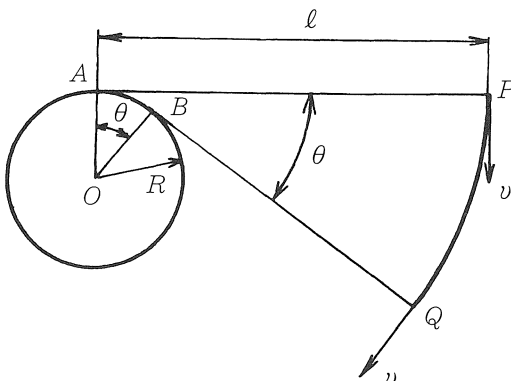


Fig. 2 A particle winding around the pole

き、Pの質点はQへ移動したとすると、糸はB点で円柱に接することになる。よって糸の長さlはdt時間にRθだけ短くなったのであるから、dt時間の角運動量の減少量はmRθvである。また $\theta l = vdt$ であるから、θを消去すると $mRv^2 dt / l$ となり、単位時間では $mRv^2 / l$ となる。したがって単位時間の角運動量の減少量  $-dL / dt$  は次式となる。

$$-\frac{dL}{dt} = \frac{mRv^2}{l} \text{ .....(3)}$$

糸の張力は遠心力によるから、 $F = mv^2 / l$ である。円柱が固定されていることは、時計回りに回転する質点の運動に対して、これと反対方向に、 $M = F \cdot R$ の回転モーメントを加えたことになる。したがって次式を得る。

$$-\frac{dL}{dt} = \frac{mRv^2}{l} = F R = M \text{ .....(4)}$$

よって、単位時間の角運動量の減少量は、反対方向の回転モーメントに等しいと言う関係が得られた。図2の場合、糸が円柱に巻き付いてlが小さくなると、質点は速く動くようになると誤解され易いので、注意が必要である。

図3は、質量が無視できる長さ2lの棒の両端に、質量mの質点P、Qがあり、この棒の中心で角度θで固定された、質量が無視できる棒を取り付け、その両端を摩擦を無視できる軸受で支えた場合である。両軸受を結ぶ軸をξ軸とし、質点P、Qは速度vで、ξ軸まわりに回転しているとすると、この場合、

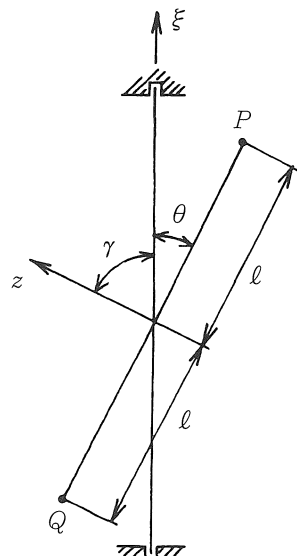


Fig. 3 Stable rotation of two particles

ξ軸まわりの角運動量  $L_\xi$  は

$$L_\xi = 2mvl\sin\theta \quad \dots\dots\dots(5)$$

である。また二個の質点のξ軸まわりの慣性モーメントを  $I_\xi$  とすると、 $I_\xi = 2ml^2\sin^2\theta$  であり、角速度  $\omega_\xi$  は、 $\omega_\xi = v/l\sin\theta$  であるので、 $L_\xi = I_\xi\omega_\xi$  が式(5)に等しいと考えることもできる。

質点が図3の位置へ来た場合、急に軸受を上下方向へ移動させて取り除くと、二つの質点は図のz軸まわりに、運動エネルギー保存則により、同一のvの速さで定常回転する。このことは、つぎのように考えれば、容易に理解できる。仮に回転運動する二つの質点が図の位置へ来たとき、急に取付け棒から切り離れたとすると、質点P、Qは図3の紙面に垂直で、互いに反対方向へ直線運動する。しかし長さ2lの棒の両端に固定された場合では、z軸まわりの円運動をすることになる。したがってz軸まわりの角運動量  $L_z$  は、質点の速度はvで同じであるので

$$L_z = 2mlv \quad \dots\dots\dots(6)$$

となり、軸受を取り去る前のξ軸まわりの角運動量よりも大きくなる。しかし軸受を取り除く際、ξ軸まわりに何らの回転モーメントを加えていないので、角運動量保存則により、ξ軸まわりの角運動量は一定である。軸受を取り除いた後は、z軸まわりの角運動量  $L_z = 2mlv$  のξ軸方向成分  $2mlv\cos\gamma = 2mlv\sin\theta$  が前に述べた式(5)のξ軸まわりの角運動量となる。ここに  $\gamma = (\pi/2) - \theta$  で、 $\cos\gamma$  はξ軸とz軸の方向余弦である。したがって次式が成り立つ。

$$L_\xi = L_z\cos\gamma \quad \dots\dots\dots(7)$$

一方質点が図の位置では、ξ軸まわりの速度はvで、ξ軸からの距離は  $l\sin\theta$  であるので、二個の質点の合計角運動量は、式(5)と同じ  $2mvl\sin\theta$  である。軸受を取り除いてから、z軸まわりに半径lの円運動をして90°回転した場合は、ξ軸からの距離はlであるが、速度vのξ軸まわりの速度成分は  $v\sin\theta$  であるので、この位置でも角運動量は、式(5)と同じであることは容易に理解できる。

### 3 慣性モーメントと慣性乗積

簡単のため図4に示すように、物体の重心Oを通る任意の直角座標をx、y、zとする。ξ軸は重心Oを通る軸で、x、y、z軸となす角度をそれぞれα、

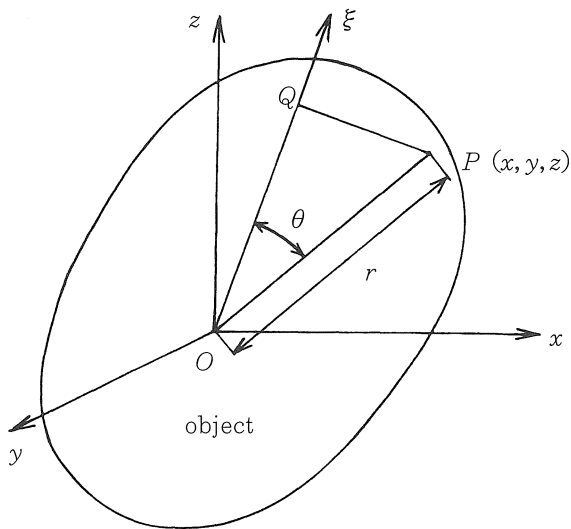


Fig. 4 Moment of inertia  $I_\xi$

β、γとする。物体内の任意の点をPとし、その座標をx、y、zとする。Pよりξ軸へ垂線を下し、その交点をQとする。 $\overline{OP}$ 、 $\overline{OQ}$  との間の角度をθとする。 $\overline{OP} = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  であり、 $\overline{OP}$  のx、y、z軸との方向余弦は  $x/r$ 、 $y/r$ 、 $z/r$  である。またξ軸の方向余弦は  $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$  である。したがって

$$\cos\theta = \frac{x}{r}\cos\alpha + \frac{y}{r}\cos\beta + \frac{z}{r}\cos\gamma \quad \dots\dots\dots(8)$$

である。この物体のξ軸まわりの慣性モーメント  $I_\xi$  は、P点の質量をmとすると

$$I_\xi = \sum m\overline{PQ}^2 \quad \dots\dots\dots(9)$$

である。また  $\overline{PQ}^2 = r^2\sin^2\theta = r^2(1 - \cos^2\theta)$  であるから、式(8)を代入し

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \dots\dots\dots(10)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \\ &\quad - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 \\ &= (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta \\ &\quad + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma - 2\cos\beta\cos\gamma yz \\ &\quad - 2\cos\gamma\cos\alpha zx - 2\cos\alpha\cos\beta xy \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

となる。したがってξ軸まわりの慣性モーメント  $I_\xi$  は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} I_\xi &= \sum m\overline{PQ}^2 \\ &= \cos^2\alpha \sum m(y^2 + z^2) + \cos^2\beta \sum m(z^2 + x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos^2\gamma \sum m(x^2 + y^2) - 2\cos\beta\cos\gamma \sum myz \\
 & - 2\cos\gamma\cos\alpha \sum mzx - 2\cos\alpha\cos\beta \sum mxy \\
 & \dots\dots\dots(12)
 \end{aligned}$$

式(12)の右辺前半に、つぎの記号を用いる。

$$\begin{aligned}
 I_x &= \sum m(y^2 + z^2), \quad I_y = \sum m(z^2 + x^2) \\
 I_z &= \sum m(x^2 + y^2) \quad \dots\dots\dots(13)
 \end{aligned}$$

$I_x$ 、 $I_y$ 、 $I_z$ はそれぞれ  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸まわりの慣性モーメントである。また後半につぎの記号を用いる。

$$\begin{aligned}
 F &= \sum myz, \quad G = \sum mzx, \quad H = \sum mxy \\
 &\dots\dots\dots(14)
 \end{aligned}$$

$F$ 、 $G$ 、 $H$ は  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸についての慣性乗積と呼ばれる。式(13)、(14)の記号を用いると、式(12)の  $I_\xi$  は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 I_\xi &= I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma \\
 & - 2F\cos\beta\cos\gamma - 2G\cos\gamma\cos\alpha - 2H\cos\alpha\cos\beta \\
 & \dots\dots\dots(15)
 \end{aligned}$$

慣性乗積  $F$ 、 $G$ 、 $H$ のうち、一例として  $F$  について考える。まず重心を通る直角座標  $x$ 、 $y$ 、 $z$  をとり、図5は  $x = 0$  の平面を示したものである。この物体を  $y$  軸まわりに  $\omega_y$  で回転させると、座標  $y$ 、 $z$  の点  $P$  には、 $mz\omega_y^2$  の遠心力が作用し、この力による回転軸である  $y$  軸に垂直な  $x$  軸まわりの反時計まわりの回転モーメントは  $mzy\omega_y^2$  となる。よって  $x = 0$  の平面上の全質量については  $\omega_y^2 \sum mzy = \omega_y^2 F$  の  $x$  軸まわりに反時計方向の回転モーメントが生じる。 $x$  がゼロでなくある値の場合、 $y$  軸からの距離は大きくなるので、それに応じて遠心力も大

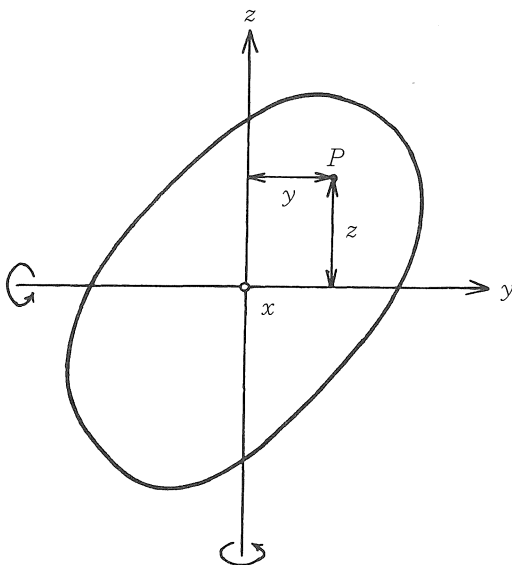


Fig. 5 Product of inertia F

きくなる。しかしこの力の  $z$  軸方向成分が  $x$  軸まわりの回転モーメントになるから、この場合も  $x = 0$  の場合と同じく  $\omega_y^2 \sum mzy$  が、反時計まわりの回転モーメントとなる。 $z$  軸まわりに  $\omega_z$  で回転させた場合は、 $\omega_z^2 \sum mzy$  は時計まわりの回転モーメントとなる。 $G$ 、 $H$ も同様である。

$x$ 、 $y$ 、 $z$  軸を物体に対して適当に回転させて、 $F = G = H = 0$  になるように選んだとき、 $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸を慣性主軸と言う。慣性主軸  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸まわりに無重力、真空中で物体を回転させた場合、慣性乗積はゼロであるので、物体を回転させるモーメントはゼロとなり、回転軸に垂直な軸まわりの回転は生じない。

$x$ 、 $y$ 、 $z$  軸が慣性主軸の場合、式(15)の  $F$ 、 $G$ 、 $H$  はゼロであるから、 $\xi$  軸まわりの慣性モーメント  $I_\xi$  は

$$\begin{aligned}
 I_\xi &= I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma \quad \dots\dots\dots(16) \\
 & \text{となる。}
 \end{aligned}$$

式(16)を変形するため、 $I_x$ 、 $I_y$ 、 $I_z$  に式(13)を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 I_\xi &= \cos^2\alpha \sum m(y^2 + z^2) + \cos^2\beta \sum m(z^2 + x^2) \\
 & + \cos^2\gamma \sum m(x^2 + y^2) \\
 & = (\cos^2\beta + \cos^2\gamma) \sum mx^2 + (\cos^2\gamma + \cos^2\alpha) \sum my^2 \\
 & + (\cos^2\alpha + \cos^2\beta) \sum mz^2
 \end{aligned}$$

ここで式(10)より次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \\
 \cos^2\gamma + \cos^2\alpha &= 1 - \cos^2\beta = \sin^2\beta \\
 \cos^2\alpha + \cos^2\beta &= 1 - \cos^2\gamma = \sin^2\gamma
 \end{aligned}$$

この式を用いると、 $I_\xi$  は次式のように書き直される。

$$\begin{aligned}
 I_\xi &= \sin^2\alpha \sum mx^2 + \sin^2\beta \sum my^2 + \sin^2\gamma \sum mz^2 \\
 & \dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

$I_\xi$  が式(17)で表わされることは、つぎのように考えれば容易に理解できる。物体がもつ物理量の中で、物体の回転運動に関与するのは、慣性主軸まわりの慣性モーメント  $I_x$ 、 $I_y$ 、 $I_z$  のみであって、物体の形状には関係しない。そこで物体の形状として簡単のため、質量が慣性主軸  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸上だけに分布している場合を考える。この場合、 $x$  軸上  $x$  の点の  $\xi$  軸との距離は  $x\sin\alpha$  であるので、この質量による  $\xi$  軸まわりの慣性モーメントは  $\sin^2\alpha \sum mx^2$  である。 $y$ 、 $z$  軸も同様であるので、式(17)が得られる。

4 角運動量保存の法則

いま物体を無重力、真空中でξ軸まわりにω<sub>ξ</sub>の角速度で回転させると、角運動量保存の法則により、次式で示すξ軸まわりの角運動量Lが一定となる。

$$L = I_{\xi} \omega_{\xi} = (I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma) \omega_{\xi} = \text{const.} \quad \dots\dots\dots(18)$$

ω<sub>ξ</sub>を慣性主軸x, y, z方向の成分ω<sub>x</sub>, ω<sub>y</sub>, ω<sub>z</sub>に分けると

$$\omega_x = \omega_{\xi} \cos \alpha, \quad \omega_y = \omega_{\xi} \cos \beta, \quad \omega_z = \omega_{\xi} \cos \gamma \quad \dots\dots\dots(19)$$

であるから、次式が得られる。

$$L = I_x \omega_x \cos \alpha + I_y \omega_y \cos \beta + I_z \omega_z \cos \gamma = \text{一定} \quad \dots\dots\dots(20)$$

I<sub>ξ</sub>として式(17)を用いた場合は次式となる。

$$L = (\sin^2 \alpha \sum m x^2 + \sin^2 \beta \sum m y^2 + \sin^2 \gamma \sum m z^2) \omega_{\xi} = \text{一定} \quad \dots\dots\dots(21)$$

角運動量は、方向を持ったベクトル量である。したがってこの保存則は、図3の質点の運動で述べたように、方向は最初に回転を与えたξ軸方向で不変であり、大きさも一定である。方向が不変と言うことは、慣性系に対して一定の方向を持つことを意味し、この座標系に対しニュートンの運動法則が成り立つ。式(20)、(21)のα、β、γは、ξ軸と各慣性主軸との間の角度であるので、不変のξ軸を指定しなければ、角運動量保存則を書き表すことはできない。また角運動量Lの大きさは、式(20)より各慣性主軸x, y, z方向の角運動量I<sub>x</sub>ω<sub>x</sub>, I<sub>y</sub>ω<sub>y</sub>, I<sub>z</sub>ω<sub>z</sub>のξ軸方向の成分を加え合わせたものである。物体はξ軸まわりに回転しながら、後に述べるように、ξ軸に垂直な軸まわりに回転するので、α、β、γの値も変化するが、式(20)、(21)で表わされるLの値は一定値を保つ。ξ軸に垂直な軸まわりに回転することにより、この軸まわりに角運動量を持って、この角運動量はξ軸に垂直であるため、ξ軸方向の成分を持たない。従って式(20)、(21)の値に直接関係しない。ただこの回転によって、α、β、γの値が変わり、I<sub>ξ</sub>の値が変わるので、ω<sub>ξ</sub>の値も変わる。

以上角運動量保存の法則を表わす正しい式について述べた。しかし従来の通説は、慣性主軸x, y, z方向の単位ベクトルi, j, kを用いて次式で表わしている<sup>(3)</sup>。

$$L = I_x \omega_x i + I_y \omega_y j + I_z \omega_z k = \text{一定} \quad \dots\dots\dots(22)$$

したがって次式が成り立つとしている。

$$L^2 = I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 = \text{一定} \quad \dots\dots\dots(23)$$

式(22)、(23)では、I<sub>x</sub>ω<sub>x</sub>等をLのx等の成分と考えたから間違ったのである。これではω<sub>ξ</sub>の方向とLの方向が一致しない。さらに角運動量保存則が、慣性系に対して方向、大きさともに不変である点を見落したことに原因がある。正しい式では前に述べたように、慣性系に対して(不変のξ軸に対して)、角運動量は一定となる。

5 回転板の振動

簡単な例として、図6に示すように、回転する板の振動を取り上げる。板面に平行な慣性主軸のx軸に対してθ<sub>0</sub>の傾きを持ち、y軸に垂直なξ軸まわりにω<sub>0</sub>の角速度で回転させる。板の厚さを無視すれば

$$I_x = \sum m y^2, \quad I_y = \sum m x^2, \quad I_z = \sum m (y^2 + x^2) = I_x + I_y$$

である。したがって、I<sub>y</sub>=aI<sub>x</sub>とすれば

I<sub>z</sub>=(1+a)I<sub>x</sub>である。この場合、ξ軸まわりの慣性モーメントI<sub>ξ</sub>は、式(16)または式(17)より、I<sub>ξ</sub>=(1+a sin<sup>2</sup>θ<sub>0</sub>)I<sub>x</sub>となる。板がさらに傾いて、x軸とξ軸の角度がθとなった場合、ξ軸まわりの角速度をω<sub>ξ</sub>とする。角運動量保存則より、次式が成り立つ。

$$\omega_{\xi} = \frac{(1+a \sin^2 \theta_0) \omega_0}{1+a \sin^2 \theta} \quad \dots\dots\dots(24)$$

θ<sub>0</sub>=0とすればω<sub>ξ</sub>は次式となる。

$$\omega_{\xi} = \frac{\omega_0}{1+a \sin^2 \theta} \quad \dots\dots\dots(25)$$

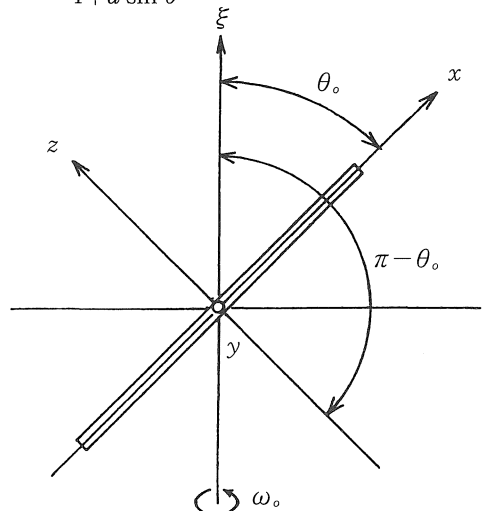


Fig. 6 Swinging of rotating board

運動エネルギー保存則より、その2倍をとれば、次式が得られる。

$$(1+a \sin^2 \theta_0) I_x \omega_0^2 = (1+a \sin^2 \theta) I_x \omega_x^2 + a I_x \omega_y^2 \quad \dots\dots\dots(26)$$

したがって  $\omega_y$  は次式で表わされる。

$$\omega_y = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0 + a \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0 - a \sin^4 \theta_0}{1+a \sin^2 \theta}} \omega_0 \quad \dots\dots\dots(27)$$

$\theta_0 = 0$  とすれば  $\omega_y$  は次式となる。

$$\omega_y = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+a \sin^2 \theta}} \omega_0 \quad \dots\dots\dots(28)$$

式(27)を2乗して時間tで微分し、

$d/dt = d\theta/dt \cdot d/d\theta = \omega_y d/d\theta$  の関係を用いるか、または  $I_y(d\omega_y/dt)$  が、 $\omega_x$  の回転によって生じる遠心力に基づく回転モーメント  $M = \omega_x^2 \sin \theta \cos \theta I_y$  に等しいと置けば、角加速度  $d\omega_y/dt$  は次式となる<sup>(1)</sup>。

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \sin \theta \cos \theta \omega_x^2 \quad \dots\dots\dots(29)$$

この  $\omega_x$  に式(24)を代入すれば、次式が求まる。

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{\sin 2\theta}{2} \frac{(1+a \sin^2 \theta_0)^2}{(1+a \sin^2 \theta)^2} \omega_0^2 \quad \dots\dots\dots(30)$$

$\theta_0 = 0$  とすれば  $d\omega_y/dt$  は次式となる。

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{\sin 2\theta}{2} \frac{\omega_0^2}{(1+a \sin^2 \theta)^2} \quad \dots\dots\dots(31)$$

図に示す通り、板は  $\xi$  軸まわりに回転しながら、 $\xi$  軸に垂直で物体と共に回転する  $y$  軸まわりに、 $\theta_0$  から  $\pi - \theta_0$  の間を回転振動する。 $\theta = \theta_0$  の場合、式(27)より  $\omega_y$  はゼロであるが、式(30)より  $d\omega_y/dt$  はゼロでないので、自由にした直後から回転振動を始める。 $y$  軸まわりの回転振動は、 $I_x$  が変化することによって、 $\omega_x$  に影響を与えるが、 $y$  軸まわりの角運動量は、 $\xi$  軸に対し直角のため  $\xi$  軸方向の成分を持たないので、角運動量保存則には直接の関与はない。しかし従来の間違った式(22)によると、直接関与する。

図7は  $a = I_y/I_x = 2$ ,  $\theta_0 = 0$  の場合について、角速度比率  $\omega'_x = \omega_x/\omega_0$ ,  $\omega'_y = \omega_y/\omega_0$ ,  $\omega'_z = \omega_z/\omega_0$  を傾き角  $\theta$  に対して示した。この場合  $\omega_x = \omega_0 \cos \theta$ ,  $\omega_z = \omega_0 \sin \theta$  であり、 $y$  軸と  $\xi$  軸は直角であるので、 $\omega_x$  の  $y$  方向成分はゼロである。図の  $\omega'_y$  は式(28)で示される倒立の角速度の比率である。最初に回転を与えられた  $\xi$  軸が、慣性主軸と完全に一致し、 $\theta_0 = 0$  の場合には式(28), (31)の  $\theta$  もゼロであり、 $\omega_y$ ,  $d\omega_y/dt$  がゼロのため倒立しない。しかし実際に  $\xi$ ,  $x$  の両軸が完全に一致することはありえ

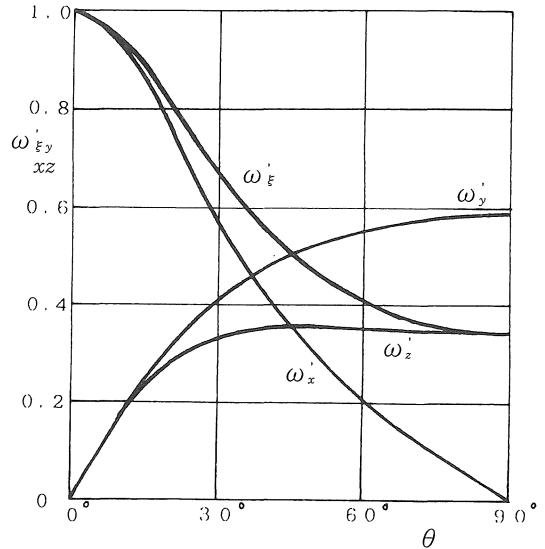


Fig. 7 Ratio of angular velocity ( $\theta_0 = 0, a = 2$ )

ないので、 $\xi$  軸まわりにしばらく定常回転した後、必ず倒立する。図7では  $0^\circ$  から  $90^\circ$  までを示したが、 $90^\circ$  以上では、 $\theta = 90^\circ$  で折り曲げた場合と同じであるので略した。ただし  $\omega'_x$  は符号が負となるので、それをさらに横軸 ( $\theta$  軸) で折り曲げる必要がある。 $\omega'_\xi$  は  $\theta = 0^\circ$  付近で  $\omega'_x$  と一致し、 $\theta = 90^\circ$  付近では  $\omega'_z$  と一致する。 $\omega'_y$  は  $\theta = 0$  ではゼロ、 $\theta = 90^\circ$  で最大値をとる。

図8は図7と同じく  $a = 2$  であるが、 $\theta_0 = 45^\circ$  の場合、回転振動をする角速度比率を示す。この場合式(27)は

$$\omega_y = \sqrt{\frac{2\sin^2 \theta - 1}{1+2\sin^2 \theta}} \omega_0$$

となる。 $\theta_0 = 45^\circ$  では、 $\omega'_x$  と  $\omega'_z$  は等しく、 $\omega'_y$  はゼロである。

最初に物体に与えられた運動エネルギー ( $1/2$ )  $I_{\xi_0} \omega_0^2 = (1/2) (1+a \sin^2 \theta_0) I_x \omega_0^2$  が、 $y$  軸まわりに物体が振動することによって、 $x, z, \xi, y$  方向の運動エネルギーにどのように変化するかを求めよう。 $x$  軸まわりの運動エネルギーは、 $(1/2) I_x \omega_x^2$ ,  $z$  軸まわりは  $(1/2) (1+a) I_x \omega_z^2$ ,  $\omega_x = \omega_0 \cos \theta$ ,  $\omega_z = \omega_0 \sin \theta$  である。また  $\xi$  軸まわりの運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} I_\xi \omega_\xi^2 = \frac{1}{2} \frac{I_x (1+a \sin^2 \theta_0)^2}{(1+a \sin^2 \theta)} \omega_0^2$$

であり、これは  $x$  軸および  $z$  軸の運動エネルギー

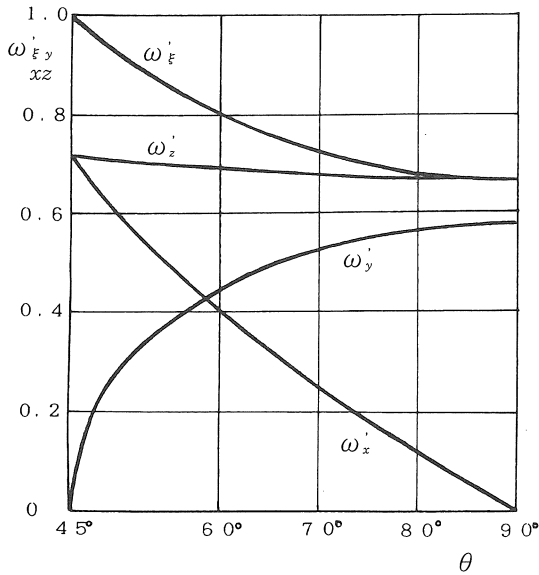


Fig. 8 Ratio of angular velocity ( $\theta_0 = 45^\circ, a = 2$ )

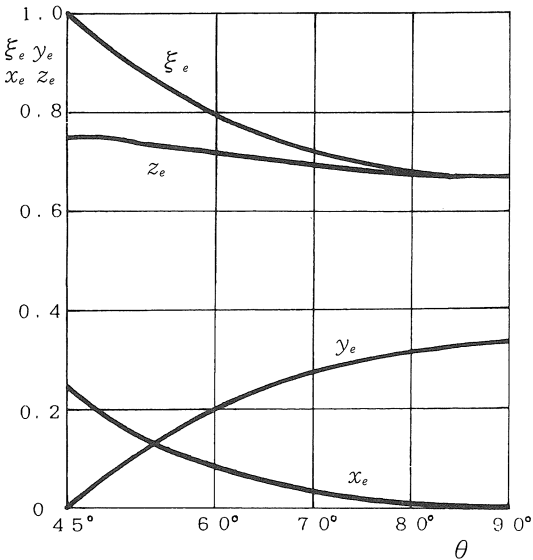


Fig. 9 Ratio of kinetic energy ( $\theta_0 = 45^\circ, a = 2$ )

の和である。したがって  $x, z, \xi, y$  軸まわりの運動エネルギーの、全エネルギーに対する比率  $x_e, z_e, \xi_e, \eta_e$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x_e &= \frac{(1+a \sin^2 \theta_0) \cos^2 \theta}{(1+a \sin^2 \theta)^2} \\ z_e &= \frac{(1+a \sin^2 \theta_0)(1+a) \sin^2 \theta}{(1+a \sin^2 \theta)^2} \\ \xi_e + z_e &= \frac{1+a \sin^2 \theta_0}{1+a \sin^2 \theta} \end{aligned} \right\}$$

$$y_e = \frac{a (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0 + a \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0 - a \sin^4 \theta_0)}{(1+a \sin^2 \theta)(1+a \sin^2 \theta_0)} \dots\dots\dots(32)$$

またエネルギー比率の合計は、次式となる。

$$x_e + z_e + y_e = \xi_e + \eta_e = 1 \dots\dots\dots(33)$$

図9は、 $a = I_y / I_x = 2, \theta_0 = 45^\circ$ の場合、エネルギー比率  $x_e, z_e, \xi_e, \eta_e$  を  $\theta$  に対して示した。

### 6 オイラーの方程式

無重力場で自由に回転する物体には、次式で示すオイラーの方程式が成り立つとして、よく用いられる<sup>(3)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} &= (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} &= (I_z - I_x) \omega_z \omega_x \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} &= (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

式(34)の左辺は、ある慣性主軸まわりの慣性モーメントと角加速度の積であるから、右辺は角加速度を与えるための回転モーメントを表わしていると考えられる。そこで式(34)の右辺の  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  は、角運動量が一定の  $\xi$  軸まわりの角速度  $\omega_\xi$  の慣性主軸方向の成分と仮定しよう。前節で述べた板の振動の場合では、 $y$  軸は  $\xi$  軸に垂直であるから、 $\omega_y = 0$  であり、 $\omega_x = \omega_\xi \cos \theta, \omega_z = \omega_\xi \sin \theta$  である。この場合式(34)の  $x, z$  軸に関する1番目と3番目の式はゼロとなり、2番目の  $y$  軸に関する式のみが残る。また板の場合、 $I_z - I_x = I_y$  であるので、これらを2番目の式へ代入すると

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \sin \theta \cos \theta \omega_\xi^2 \dots\dots\dots(35)$$

が得られる。これは、先に求めた式(29)と同じである。このことから前述の仮定は正しくて、オイラーの方程式(34)の右辺にある  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  は  $\omega_\xi$  の  $x, y, z$  方向成分であり、左辺のそれらは  $\xi$  軸に垂直で、 $\omega_\xi$  で回転する物体に固定された軸まわりに回転する角速度の成分で、全く異なる回転であることが分かる。通常同一の記号を用いるので、右辺と左辺の角速度成分を同じように扱うと、間違えることになる。例えば式(34)の両辺に、1番上の式から順次  $I_x \omega_x, I_y \omega_y, I_z \omega_z$  を乗じ加えると、右辺はゼロになる。一方左辺を加えた式について時間  $t$  で積分すれ

ば、式(23)の  $L^2 = \text{一定}$  の式が得られる。この式は前に述べたように、明らかに誤りである。

単に  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  を与えたのみでは、これらが全部  $\xi$  軸まわりの角速度  $\omega_\xi$  の成分のみで、 $\xi$  軸に垂直な軸まわりの物体の振動、倒立の角速度を含まない場合がある。一方前述の板が振動する例のように、 $\omega_x, \omega_z$  は  $\omega_\xi$  の成分であり、 $\omega_y$  は振動の角速度の場合もある。したがってこの異なる二つの回転を明確に区別するためには、慣性系に対して方向一定の  $\xi$  軸を与える必要がある。故に  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  を与えたのみでは、物体の運動を定めたことにならない。さらにオイラーの方程式、式(24)のみでは、物体の運動は求まらない。これは  $\xi$  軸まわりの回転に対して、角運動量保存則を適用する必要があるからである。

## 7 結 言

自由回転する物体に対して、角運動量保存則を適用する場合、最も重要な点は、慣性系に対して方向が一定した軸を用いることである。本論文では、この軸を  $\xi$  軸とした。角運動量保存則は、この軸のまわりの角運動量  $L$  の大きさが一定であることを示している。この軸を用いないと、この法則を書き表

わすことはできない。また物体の回転運動を記述するのに、慣性主軸  $x, y, z$  方向の角速度  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  のみでは、運動を定めたことにならない。運動を規定するには、角運動量が保存される  $\xi$  軸まわりの回転と、 $\xi$  軸に垂直で物体が振動または倒立する回転とを区別する必要がある。オイラーの方程式のみを用いて、物体の回転運動を求めることはできない。この式の他に  $\xi$  軸まわりに、角運動量保存則を適用した式が必要である。

以上角運動量保存則および自由回転する物体の運動を考える場合の重要な点を列挙した。従来角運動量保存則については、誤って書き表わされているので、本論文により訂正されるよう希望する。

## 文 献

- (1) 山田豊、宇宙船内の不思議な回転運動、日本機械学会誌、97-910、(1994)、794
- (2) 山田豊、宇宙船内で回転するペンの倒立と振動、愛知工業大学研究報告、第30号B(1995)、27
- (3) 例えば戸田・田上・共訳、力学・新しい視点にたつて、(1993)、204、培風館

(受理 平成8年3月19日)