愛知工業大学研究報告
第２７号　平成４年

論文

ＡＨＰにおける ランクの逆転現象に関する研究

A Revised Method to Avoid Rank Reversal for AHP

錢　存華*　本告光男**
Cunhua QIAN　Mitsuo MOTOORI

AHP (Analytic Hierarchy Process) proposed by T.L.Saaty is applied to many fields. But AHP has some shortcomings. One of these is that the rank of the object might be changed when the object is added or eliminated by some reasons. In this case, we may get a wrong result. Many peoples have considered the revised methods to improve AHP. This paper proposes one modified method of AHP to compare with appraisal items and analyses it. We can get a general evaluation and avoid the occurrences of the rank reversal, using this method .

１、緒言

ＡＨＰの欠点としていわゆるランクの逆転現象がしばしば指摘される。つまり，評価項目に関して同一スコア（ほぼ同一スコアも含まれる）を持つ代替案が追加されたり、削除されたりした場合，順位が変わる可能性がある。この点に配慮することなくＡＨＰを用いると、誤った結論を出す心配がある[1]、[2]。従来，このような現象が発生する可能性があることはＡＨＰの欠点としていろんな発見、対処する方法が提案され[1]，[2]，[3]，[4]，ＡＨＰ批判派から強く非難されている[5]。

この研究ノートでは，まず新しい視点から逆転現象の原因について検討し，さらにその改良方法について議論する。このノートは次の構成に従っている。

第２章、逆転現象とその研究現状
第３章、綜合重要度の変化の原因とその対策
第４章、新提案
第５章、特別な場合の逆転の考察

＊　愛知工業大学　客員研究員（揚州師範学院）
＊＊愛知工業大学　経営工学科（豊田市）

２、逆転現象とその研究現状

ＡＨＰによる評価は階層図、一対比較、重要度決定、総合重要度計算という手順を追って展開される。

最終目標に対して，いくつかの案があり，その中から一つを選んだり、それらの順位付けを行う場合、重要度の決定に当り，評価項目がいくつかあり、しかも互いに目的に対して利害が相反する面を持っているのが普通である。そこで最終目標と代替案との間に考えられる評価項目を組み込んで階層図を作って分析する。評価項目間の重要さが曖昧だったり，数量化するのが難しかったりするので，評価項目間の「一対比較」を行い、重要度を決定し，各評価項目について代替案の重要度も同じ方法で計算して，それらを縦に積み上げげて総合重要度を計算する。

この方法の特長として，かなり入り組んだ複雑な関係でも階層図によって分析し、すっきりと整理される。それに数量化の難しい事象に人間の経験や勘を生かし、一対比較を用いて定性的な言語表現によ

る尺度を用い、数量化して客観的に信頼に足るデータとして取り扱うことが出来るので威力を発揮する。これはＡＨＰを使った多くの人達によって確められている。

この場合，理解しにくいのは綜合重要度の算出法であると思われる。その点、ＡＨＰでは次のように取り扱う。

ある最終目標に関するｍ個の評価項目の一対比較行列をＡとする。固有方程式

$$Au=\lambda_{max}u \qquad (2.1)$$

を満足する実最大固有値λ_{max}と固有ベクトルを求め，その和が１になるように基準化して、重要度$u=(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_m)$を求める。ｉ番目の評価項目に関するｎ個の代替案の一対比較行列は同じ方法で重要度

$$\omega^i=(\omega^i{}_1, \cdots, \omega^i{}_j, \cdots, \omega^i{}_n)$$

を求める。

ｕとω^i（$i=1, 2, \cdots, m$）の積和により，総合重要度ベクトル

$$s=(s_1, \cdots, s_n)$$

を求める。

$$s=\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{m} u_i \begin{pmatrix} \omega^i{}_1 \\ \omega^i{}_2 \\ \vdots \\ \omega^i{}_n \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

しかし，この場合，例えば新しい代替案が追加されたり、前からの案が削除されたりした場合，代替案の順位は変わる可能性がある。

まず、代替案の“コピー”案が追加されることによって生じた逆転現象の例を刀根[2]から引用する。

［例１］：例えば

$u=(.68, .32)$

$\omega^1=(.666, .333)$；

$\omega^2=(.25, .75)$

$s=.68\times(.666, .333)$

$\quad +.32\times(.25, .75)$

$\quad =(.533, .466) \qquad (2.3)$

の場合，１番目の代替案が有利である。ここで１番目の代替案の“コピー”案が２つ追加されると、“コピー”案が１番目の代替案と同じスコアを持っているから

$\omega^1=(.286, .286, .286, .143)$

$\omega^2=(.167, .167, .167, .500)$

$s=(.248, .248, .248, .258)$

（２．４）

となって１番目の代替案が不利になり逆転することになる。

その対処法としてＳａａｔｙ[3]と刀根[2]は通常の方法で総合重要度をまず計算し、評価結果が近似している場合“コピー”や“コピーまがい”と思われる代替案を発見する検出法を提案している。しかし、このような現象の発生は“コピー”や“コピーまがい”案を追加、削除する場合とは限らない。簡単な例をあげる。

［例２］：

$u=(.7, .3)$

$\omega^1=(4/7, 2/7, 1/7)$；

$\omega^2=(.1, .2, .7)$

$s=.7\times(4/7, 2/7, 1/7)$

$\quad +.3\times(.1, .2, .7)$

$\quad =(.43, .26, .31)$

（２．５）

１番目の代替案は２番目、３番目の代替案と比べても，“コピー”や“コピーまがい”案だと思われない、１番目の代替案を削除すると、完全整合性があれば

$\omega^1=(2/3, 1/3)$；

$\omega^2=(2/9, 7/9)$

$s=.7\times(2/3, 1/3)$

$\quad +.3\times(2/9, 7/9)$

$\quad =(1.6/3, 1.4/3) \qquad (2.6)$

となって逆転現象がやはり発生する。

市橋[4]は代替案の重要度の和が１となるように基準化するために代替案の追加による順位の逆転現象が起こり，最大値が１となるように基準化すれば克服できると指摘している。その論文の中の「命題１」はｎ個の代替案の一対比較行列から最大値を１とする方法で得られた重要度は，もう１つの代替案が追加されたときに整合性を満たし，且つ、元のｎ個全ての代替案より優位に評価することが無いならば，元のｎ個の代替案の重要度が変化しないことを証明している。

しかしながら，和を１とする基準化を行っても，重要度の値については代替案の追加、削除によって変化する可能性がある。しかし，順位及び比例関係については変化しないことが容易に推察される。しかし、ｍ個の評価項目に関する総合重要度は変化する可能性があるだけでなく、順位、比例関係が変化

する可能性もある。最大値を１とする方法で得られた重要度は，追加された代替案が全ての評価項目の基でトツプになることが無いならば，もちろん、元の代替案の総合重要度が変化しないことが保証される。しかし、１つの評価項目の基で、元の代替案に対してトップに評価することが無いならば，他の評価項目の基で、元の代替案に対して必ずしも上位に評価しないわけではないから，総合重要度、順位が変わらないという保証はない。数値例をあげる。

［例３］：

$$u=(.3, .7)$$

$$\omega^1=(.6, .2, 1.0)\ ;$$

$$\omega^2=(1.0, .5, .25)$$

$$s=(.88, .41, .475) \qquad (2.7)$$

１番目の代替案が削除されると、

$$\omega^1=(.2,\ 1.0)\ ;$$

$$\omega^2=(1.0,\ .5)$$

$$s=(.76,\ .65) \qquad (2.8)$$

となって逆転になる。

このような総合重要度、順位が変化する原因について以下述べる。

３、総合重要度の変化の原因とその対策

まず、［例２］の代替案を削除する前の（２．５）式と削除された（２．６）式を比較する。（２．６）式から

$$\begin{aligned} s &= .7\times(2/7\times7/3,\ 1/7\times7/3) \\ &\quad +.3\times(.2\times10/9,\ .7\times10/9) \\ &= (.7\times7/3)\times(2/7,\ 1/7) \\ &\quad +(.3\times10/9)\times(.2,\ .7) \end{aligned} \qquad (3.1)$$

（３．１）式と（２．５）式を比較すると，代替案の追加、削除によって，ある評価項目の基で全ての代替案の重要度が同じ程度拡大あるいは縮小したことがわかる。最大値を１とする方法の場合は追加、削除される代替案がある評価項目の基で優位に評価する場合も同様である。これは、全ての評価項目の基で代替案の重要度が変化しなくて、評価項目の重要度しか変化しなかったと見なすことが出来る。このようにＡＨＰを用いた場合代替案の追加、削除によって，総合重要度が変化し、場合によっては逆転さえ起こる。これはＡＨＰの欠点と言える。従って、代替案の追加、削除によって重要度が変わらない基準化が望ましい。

ＡＨＰの階層図を作り、一対比較によって評価する考え方は優れている。問題になるのは総合重要度の計算方法であると考える。

評価ｓはｉ番目の評価項目に関するｎ個の代替案の評価が

$$w^i=(w^i_1,\ w^i_2,\ \cdots\ ,\ w^i_j,\ \cdots\ ,\ w^i_n) \qquad (3.2)$$

であり，ｊ番目の代替案について，各項目の評価が

$$w_j=(w^1_j,\ w^2_j,\ \cdots\ ,\ w^i_j,\ \cdots\ ,\ w^m_j) \qquad (3.3)$$

であるとする。理屈の上では，各項目の基で、代替案の順位をつけるときに使った評価数値 w^i_jが絶対的なものであり，また，全ての評価がまず同じ単位になるように揃えることが必要である。こうすれば，総合評価尺度を作ることが容易である。しかし、現実はその数値が入手が難しかったり，あるいは数量化することがむずかしいので，相対的な数値しか使えない。一方、一つの代替案に注目して異なる項目について評価した場合，その単位が同じであるとは限らないし，本来、異質な場合もあり，ただ単に合計することは不合理であるので相対的な数値（無次元量）しか使えないことになる。

この場合は，各項目の基で代替案の順位をつけるときに使った相対数値が同じ単位を持った場合に限って納得される。つまり，単位を揃えるために、まず基準量で割り，無次元にするのは一つの方法であると思う。いま式（３．３）のおのおのについて基準量をそれぞれ，w_1, w_2, …, w_i, …, w_mのように表し，それによって無次元量の組

$$w^1_j/w_1,\ w^2_j/w_2,\ \cdots,\ w^i_j/w_i,\ \cdots,\ w^m_j/w_m \qquad (3.4)$$

を作る。この場合に限って総合される。w^i_j/w_iをω^i_j（$i, j=1, 2, \cdots, n$）として，式（２．２）で総合重要度を計算する。各基準量がそれぞれの評価項目の目標を表す場合は，総合重要度がある程度の意味を持っている。従来のＡＨＰはこのような基準がなかったので，異なる項目についての重要度の加重平均値を計算することが不合理であったと云える。

それに、このような基準がないため，代替案の追加、削除によって評価項目の基で全ての代替案の重要度が同じ程度変動する。これは，このような基準がある場合の該当項目の重要度が同じ程度変化する

ことに相当する。つまり、このような基準がない場合の評価項目の重要度を名義重要度と謂い、基準がある場合の評価項目の重要度を実質重要度と謂うならば，従来のＡＨＰを用いて、とりあえず評価項目の名義重要度を計算したが，代替案の追加、削除によって，実質重要度は変化する。従って、総合重要度の変わることと順位の逆転する可能性は十分考えられる。このようにＡＨＰを用いた評価については総合重要度の確実性、安定性が問題になり、総合重要度が一体どのぐらいの意味を持っているか疑問があるはずである。　これがＡＨＰの欠点であると考えている。だから、ＡＨＰにとって評価項目の基準量が必要だと思う。そうすれば基準化によって生ずる代替案の追加、削除による逆転現象を防止出来るばかりでなく、異なる評価項目についての重要度の単位を揃えて総合化できる。

４、新提案

評価項目の基準量を採用した場合の重要度、総合重要度の計算について次に提案する。

４．１　提案内容

ＡＨＰを用いる意思決定問題は必ず最終目標がある。それを数値で簡単に表すことが出来ないので、幾つの面に分けてサブ目標で表すのが普通である。これらのサブ目標は目標値だけでなく、言語で表す状況、特定のパターンなども含まれている。これらのサブ目標から逆に階層図にどのような評価項目を取り入れるべきかを思い付くこともある。

まず，階層図を作ってＡＨＰの通常の方法で評価項目のウェイトを計算する。代替案の重要度を計算する前にとりあえず各評価項目について意思決定者のサブ目標を決める。ある評価項目，例えばｉ番目の評価項目の基で代替案について定量的に評価することが出来る場合は，目標値でサブ目標を示し、それを基準量w_iとする。次に該当項目について式（３．２）で表す各代替案の評価値を基準量w_iで割り、無次元の組にしたもの

$$(w^i_1/w_i,\ w^i_2/w_i,\ \cdots\cdots,\ w^i_n/w_i) \qquad (4.1)$$

を新たに評価した結果あるいは重要度

$$\omega^i=(\omega^i_1,\ \omega^i_2,\ \cdots\cdots,\ \omega^i_n) \qquad (4.2)$$

とする。

このように簡単にすることができない場合，例えばｉ番目の評価項目について定量的に評価することが難しいとか、評価値が重要度にリニアに反映されない場合は，仮想案でサブ目標を示す。例えば、花嫁の選定にあたって容姿についてある女優を目標として仮想する。仮想案をｎ＋１番目の代替案として一対比較法を用いて固有ベクトル

$$e^i=(e^i_1,\ e^i_2,\ \cdots\cdots,\ e^i_n,\ e^i_{n+1}) \qquad (4.3)$$

を求め、仮想案の重要度を１になるように基準化して、仮想案の重要度を省略する。つまり，

$$\omega^i=(e^i_1/e^i_{n+1},\ e^i_2/e^i_{n+1},\ \cdots,\ e^i_n/e^i_{n+1}) \qquad (4.4)$$

これを式（４．２）で表す重要度とみなす。このように計算した重要度は仮想案のこの評価項目についての評価値を基準量として代替案の評価値を割り、計算する重要度に相当する。代替案の重要度が１を越える場合は１とする（場合によって１を越えてもそのままで使うこともある）。全ての評価項目について基準量あるいは仮想案を決めて（異なる評価項目について仮想案が違うかも知れない）、代替案の重要度を求め、式（２．２）で総合重要度を計算する。

４．２　新提案の利点

（１）結果の安定性、合理性が保証される

総合重要度は代替案が追加されたり、削除されたりしても，変わらないという保証がある。また，結果に対する曖昧さが減って合理性、確実性も保証される。さらに有効な結果の導出に収束するのを助けるものと期待し得る。

（２）大型の問題が扱い易い

規模の大きい問題についても，安心で有効な結果を導出できる。従来の手法で一対比較される要素の数は通常７個まで，多くても９以下とされている。新手法は多くの代替案をいくつかのグループに分解し、仮想案を各グループに入れて各々重要度を計算する。仮想案を導入したので各々の計算結果の重要度は同じ基準を持っているから簡単に統合できる。

（３）数値データの組み込みができる

数値データをそのままで用いることができる。即ち，ある評価項目の基で全ての代替案の評価値を基準値で割り、無次元にして重要度と見なす。もし、一部の代替案について評価値が求められなかったと

か、定量化しにくい場合はこれらの代替案と仮想案を一対比較して重要度を計算し、両方を統合して、全ての代替案の重要度を算出することができる。勿論、これは代替案の評価値が重要度にリニアに反映される場合に限る。重要度にリニアに反映されない場合もある。例えば、コンピュータの価格と能力の関係はグロッシュにより、２次関数関係である。また，コストと重要度は逆数の関係である。このような場合は評価値と重要度の関数関係を解明してから重要度を計算しなければならない。しかし、どんな関数関係でも基準量の対応した重要度を１になるように基準化するのが望ましい。

（４）人間の思考過程にさらに近似する

意思決定問題のモデルは人間の思考過程に極力近似すべきである。ＡＨＰを用いて意思決定を行う場合にもこの点を考えなければならない。商品としての総合的な一定のレベルを持った商品について，その一部の部品のみがそのレベルをはるかに越えるものであった場合，その部品の品質は過剰品質と呼ばれる。つまり、その部品の品質は商品全体としての品質向上の助けにならない。この場合，人間が直感的に評価するときにその部品には高い評価は与えない。むしろ価格が高いだけマイナスの評価がされるであろう。

しかし、従来のＡＨＰによれば上記の過剰品質の部品はそれなりに高く評価されるので，総合重要度に影響を与えて、実質的に逆転する可能性がある。新手法ではこれを避けることができる。

（５）決定案の評価の低かった評価項目が明確になる

新提案によれば、決定案（選考案）の評価の低かった項目も承知した上で決定される。従来のＡＨＰは代替案を相対的に比較して、評価は代替案の相対的な価値は表すが，新手法は代替案を一対比較してから仮想案の評価を１とするように基準化するので、評価は代替案の相対的な価値も、人間が設定した目標との距離も表すことになる。決定案のある評価項目に低い評価が与えられた場合は、従来のＡＨＰで得た評価が相対的価値しか表さないので、評価値が大きくなっているのかも知れない。しかも，新手法で得られる評価値が０に近い値であるので、この評価項目に対する評価が低いということがはっきり示される。採用に際してその対応策も合わせて検討することができる。

４．３　新提案実施上の注意

基準の設定、仮想案を想定することが容易でない場合，この取扱いに工夫を必要とする。その時にできる限り評価の対象について専門的意見を持った人に広く参加を求め、検討するのが望ましい。基準、仮想案は評価対象によって異なるが、同じ対象に対しても当面している最終目標によって異なるべきである。

仮想案を決定するときに，票決による場合，多数決定に従うとか、３分の１で決めるとか、全会一致によるとか、どれでも構わないが，一対比較をするときに明確でなければならない。それは一対比較の整合性を保証するためである。

場合によっては仮想案、基準量が本来存在しないとか、必要でないこともある。総合国力の評価にあたってＧＮＰを１つの評価項目としてあげる場合などである。しかし，総合評価を行うためには基準化は必要である。このような場合は，その代わりに１つの代替案例えばｊ番目の代替案を選んで、グループで議論したあと直接にウェイトω^i_jをつけて、この項目についてｎ個の代替案の一対比較行列から固有ベクトル

$$e^i=(e^i_1,\ e^i_2,\ \cdots,\ e^i_j,\ \cdots,\ e^i_n) \qquad (4.5)$$

を求め、ｊ番目の代替案の重要度をω^i_jとするように基準化する。つまり，

$$\omega^i=(e^i_1\omega^i_j/e^i_j,\ \cdots,\ \omega^i_j,\ \cdots,\ e^i_n\omega^i_j/e^i_j) \qquad (4.6)$$

これに似ている逆転防止問題についての議論としてはＳａａｔｙ[6]がある．Ｓａａｔｙは「判断の尺度は，優秀，非常に良い，良い，平均的，悪い，非常に悪いといった強さの区分に分けられよう。これらの区分に対してウェイトが決められ，代替案にスコアをつけられるが，各判断の尺度のもとで対応する区分から得たウェイトが示すメリットの合計にしたがって絶対的に測定される。」と提案している。これは評価者に同じウェイトを与えて、体操の選手の評価に似ている。Ｓａａｔｙの提案は順位は保証されるが，複雑な意志決定問題にとってＡＨＰの利点としている一対比較の威力を発揮することができない。

５、特別な場合の「逆転」の考察

特別な場合は和を１とする従来の方法で得た重要度を直接に総合することができる。簡明な例によって説明する(具体的な数値は刀根[2]から引用する)。

ある企業の責任者にＡ氏とＢ氏がいて，その力関係は０．６８対０．３２でＡ氏の方が強いとする。当面している問題は一定枠のボーナスの配分であるとする。対象としてＸ君とＹ君しかいないが，Ａ氏は２対１でＸ君を好み、Ｂ氏は１対３でＹ君を好み、その通りに配分するものとする。その時和を１とするＡＨＰによる配分では次のようになる。

$u=(.68,\ .32)$

$\omega^1=(.666,\ .333)$

$\omega^2=(.25,\ .75)$

$s=(.533,\ .466)$

このモデルを解釈すると，Ａ氏の目でみると，ボーナスの６６．６％がＸ君に、３３．３％がＹ君にいくことになる。Ｂ氏の目でみると，２５％がＸ君に、７５％がＹ君にいくはずである。これらの無次元量は全体の量を１にするように作られ、単位を揃えたので統合できる。Ａ、Ｂ両氏のウェイトを加味して、加重平均値を計算すると結局，Ｘ君は全体の５３．３％を、Ｙ君は４６．６％をもらうことになる。こんな場合は仮想案は必要ではないが、基準量は必要で全体の量である。

この配分対象にＸ君型の人をもう２人追加した場合，Ａ氏、Ｂ氏の好みはＸ君のケースと同じとすれば

$\omega^1=(.286,\ .286,\ .286,\ .143)$

$\omega^2=(.167,\ .167,\ .167,\ .500)$

$s=(.248,\ .248,\ .248,\ .258)$

となる。モデルの解釈は上と同じであるが，Ｘ君型の人達は各々全体の２４．８％をもらい、Ｙ君は２５．８％をもらうことになる。これも逆転現象であるが。この２つの配分の例は何れも全体の量を基準量とし、基準化した重要度であり、配分のような場合は全体の量で基準化することが合理的であるから、総合できる。上記の配分の結果は何れも正しいと見なすことができる。

この簡明な例で提示しているのは全ての代替案の値の総和が一定数である場合，たとえば定数量の配分、マーケットシェア、投資分析などを取り扱う場合は、和を１とする方法で得た重要度が直接に総合されることである。

６、結言

この研究ノートでは、ＡＨＰの欠点としてしばしば指摘される逆転の原因を検討し，改良方法を提案したものである。この方法がＡＨＰで評価する場合に有効な解に収束することの助けとなれば幸いである。

参考文献

［１］刀根　薫　，ゲーム感覚意志決定法 ― ＡＨＰ入門 ― ，日科技連出版，１９８６

［２］刀根　薫　，「ＡＨＰにおけるコピーまがいの代替案への現実の対処法」，　ｵﾍﾟﾚｰｼｮﾝｽﾞ・ﾘｻｰﾁ，Ｖｏｌ．３６，Ｎｏ．４(1991)

［３］Ｔ．Ｌ．Ｓａａｔｙ，“Rank Generation, Preservation, and Reversal in The Analytic Hierarchy Process", Decision Sciences, Ｖｏｌ．１８，Ｎｏ．２(1987)

［４］市橋秀友他，「固有ベクトル法を用いた尺度構成係数のアセスメント」，日本経営工学会誌　，Ｖｏｌ．３９，Ｎｏ．６(1989)

［５］Ｊ．Ｓ．Ｄｙｅｒ，“Remarks on the Aualytic Hierarchy Process”，Management Science, Ｖｏｌ.36, Ｎｏ.3(1990)

［６］Ｔ．Ｌ．Ｓａａｔｙ，「ＡＨＰを用いた意志決定の構造と判断」，ｵﾍﾟﾚｰｼｮﾝｽﾞ・ﾘｻｰﾁ，Ｖｏｌ．３１，Ｎｏ．８(1986)

（受理　平成４年３月２０日）