

Short Time DFTのヒルベルト変換への適用とその特性

Application of the Short Time DFT to the Hilbert Transform and Its Characteristics

岸 政七 †

Masahichi KISHI

ABSTRACT Hilbert transformers have been keenly studied with putting emphasis on digital signal processing of SSB or RZ SSB modulation to avoid frequency occupancy increase over radio channels. By employing instantaneous spectrum concept, a novel Hilbert transformer named by "Short Time DFT Hilbert Transformer" is successfully realized over the frequency domain without any distortion both in amplitude and phase-shifting. This novel transformer is also discussed to prevent its functional precision from synchronization error which occurs either between analyzer and synthesizer within the novel transformer or between two transformers installed at sending and receiving sites in radio communication systems.

1. まえがき

限りある周波数資源の有効利用のため、各使用チャンネルの周波数占有帯域を狭帯域化することが重要であることには論を待たぬであろう。SSBは、無線周波数の占有帯域が最も狭く、周波数利用効率に優れる利点を有しているものの、振幅変調が故にフェージング耐力に劣り移動通信のようなマルチパス伝搬路を前提とする通信システムには不向きである欠点を有していた。しかし、SSB変調波にキャリア信号を加えることでSSB変調波の位相成分にも情報を乗せた変調波を生成するRZ SSBは、SSBに等しい周波数使用率を示すもののFMあるいはPMと同等以上の通話品質とフェージング耐力を獲得することに成功しており今後の各種通信システムへの幅広い適用が期待される⁽¹⁾。

ヒルベルト変換器は、これらSSBあるいはRZ SSB通信システムにおいて、両側帯波変調波から片側帯波を、位相ひずみを与えることなく抽出するためには必要不可欠な機能を提供する基本機能素子である。このためヒルベルト変換器の合成を論じた多

くの論文が見られる⁽²⁾。しかし残念なことには、位相推移が $-\pi/2$ radianを示すようにオールパスフィルタの時定数をスタガー配置した近似的な実現法を論じたものが多い。もし、かかる近似誤差を有するヒルベルト変換器を使用すると、SSB等通信システムの無線周波数占有帯域を増大させるばかりか通話品質を劣化する恐れがある。

位相推移誤差を全く許さない理想ヒルベルト変換器は、瞬時スペクトラムの概念を導入することで実現可能となる⁽³⁾。周波数域におけるヒルベルト変換は、入力信号のスペクトラムに対して実数成分と虚数成分とを入れ替えたスペクトラムを扱うことに対応する。従って、ヒルベルト変換した信号は、実部と虚部を入れ替えたスペクトラムから合成できる。この一連の操作において、周波数域上のヒルベルト変換には処理誤差が介入する余地はない⁽⁴⁾。

この理想ヒルベルト変換器において重要な役割を果たす瞬時スペクトラムは、Short Time DFTで与えられ、またヒルベルト変換した瞬時スペクトラムからの出力信号はShort Time IFTで合成されることを明らかにする。かかる意味で、理想ヒルベルト変換器を以降、Short Time DFTヒルベルト変換器と呼ぶこととする。

† 愛知工業大学 情報通信工学科 (豊田市)

瞬時スペクトラムの概念を適用して生まれた新しいタイプのヒルベルト変換器(すなわちShort Time DFTヒルベルト変換器)がいかなる特性を示すかを, システム関数である単位サンプル応答から論じる. 更にいかなる構成で回路実現されるか論じる.

2. 瞬時スペクトラムとShort Time DFT

まず, Short Time DFTが, いかにして瞬時スペクトラムを与えるか, またいかなる特性を有するかを考える. 時刻 n の瞬時スペクトラム $\Phi(n)$ を, 以下のように記述する.

$$\Phi(n) = \{\phi_0(n) \ \phi_1(n) \ \phi_2(n) \cdots \phi_{N-1}(n)\}^T. \quad (1)$$

ここに, $\phi_k(n)$ は, 瞬時スペクトラム $\Phi(n)$ のインデックス k の成分であり, Short Time DFTを用いて, 次のように与える.

$$\phi_k(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)h(n-r)W_N^{-rk} \quad (2)$$

但し, 演算子 W_N^{-rk} は, $W_N^{-rk} = \exp\{-j(2\pi rk/N)\}$ であり, 既存のDFTに等しく定義される演算子, k は周波数インデックスであり, $0 \leq k < N$ なる整数, $x(r)$ は時刻 r の入力サンプリングデータである.

Short Time DFTが存在するには, 逆変換, すなわち, 時刻 n のShort Time IFT変換された出力信号 $y(n)$ が瞬時スペクトラムから正確に再生されることが必要となろう.

従って,

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k(n)W_N^{nk} \quad (3)$$

ここに, 逆変換演算子 W_N^{nk} は, 既存のIFTに等しく, 次のように定義する.

$$W_N^{nk} = \exp\{j(2\pi nk/N)\}$$

式3で表現されるShort Time IFTにおいて, 時刻 n の出力信号 $y(n)$ が, 同じ時刻の入力信号 $x(n)$ に正しく一致しなければならない. これが, 式2に

おいて未定義のウィンドウ関数 $h(*)$ の制約となる.

式2の瞬時スペクトラムを式3に代入し, 変数 k と r に対する総和の順序を入れ替えれば, 式4が求まる.

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)h(n-r)W_N^{-rk} \right\} W_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)h(n-r) \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-r)k} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

最終右辺の中括弧でくくった変数 k の総和は, $n-r = 2Nq$ の場合に限り, N の倍数である非ゼロな値をとり, $n-r$ が他のいかなる場合でも変数 k の総和はゼロに収束する. ここに, q は任意な整数を意味する.

この事実が, 式5に示すウィンドウ関数の制約を以下に示すように与える.

$$h(p) = \begin{cases} 1, & \text{if } p = 0 \\ 0, & \text{if } p = 2Nu, \quad u \text{ は非負なる整数.} \end{cases} \quad (5)$$

例えば, $2m$ のフレーム数で切り出したナイキスト関数 $h(p)$,

$$h(p) = \frac{\sin(p\pi/N)}{p\pi/N}, \quad \text{ここに } -mN \leq p \leq mN, \quad (6)$$

は, 式5を満たすことができる. 従って, 今後, 特に断らない限り, Short Time DFTのウィンドウ関数として, フレーム数 $2m$ のTruncated Nyquist関数を用いることとする.

式5のウィンドウ関数 $h(p)$ を式4に代入すれば, 出力 $y(n)$ は,

$$y(n) = \frac{1}{N} x(n)h(0) \cdot N = x(n), \quad (7)$$

となる. 瞬時スペクトラム $\Phi(n)$ から, 出力 $y(n)$ が正しく再生でき, 入力信号 $x(n)$ に一致することが知れよう.

Short Time DFTにおいては出力が, 唯一のサンプリング時刻 n のみに関与し, 従来のDFT出力が N 個の入力ベクトルに関与する点で, 大きく異なることに注意して欲しい.

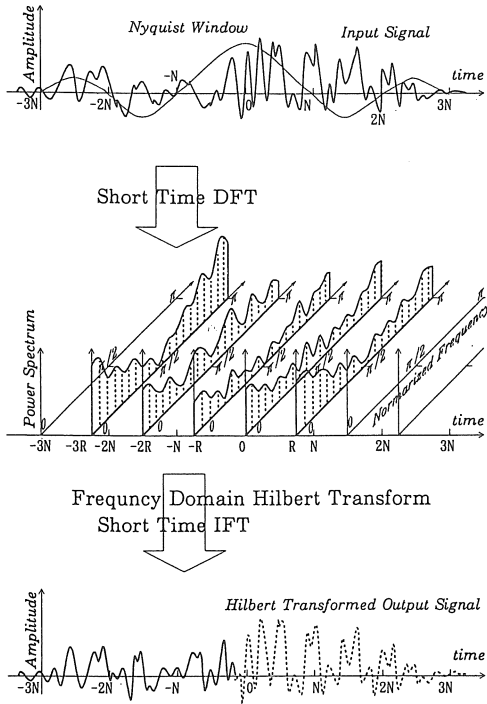


図1 Short Time DFTヒルベルト変換の処理概要

Fig. 1 Processing outline in the Short Time DFT Hilbert transform.

3. Short Time DFTヒルベルト変換の原理

図1にShort Time DFTヒルベルト変換の処理概要を示す。Short Time DFTヒルベルト変換において、すべての入力信号 $x(r)$ は、まずShort Time DFTを用いて、瞬時スペクトラム $\Phi(n)$ に解析される。

求めた瞬時スペクトラム $\Phi(n)$ に何も処理を加えず、そのまま逆変換すなわちShort Time IFTすれば、式7に示すように入力信号が正しく出力される。一方、瞬時スペクトラムに $-\pi/2$ radianの位相回転を与えた後、Short Time IFTすれば、理想ヒルベルト変換器が実現できることが予想できよう。

図2に、周波数域におけるヒルベルト変換を示す。瞬時スペクトラム $\Phi(n)$ のインデックス k の成分 $\phi_k(n)$ を因果律を満たすように周波数域上で $-\pi/2$ radian回転すれば、図中破線で示すベクトル $\hat{\phi}_k(n)$ が求まる。今、 $\phi_k(n)$ の実数成分を $a_k(n)$ 、虚数成分を $b_k(n)$ とすれば、位相回転したベクトル $\hat{\phi}_k(n)$ は、次のように与えられる。

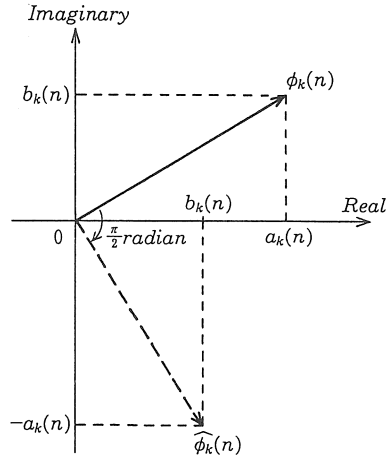


図2 周波数域におけるヒルベルト変換

Fig. 2 Hilbert Transform on the frequency domain.

$$\hat{\phi}_k(n) = b_k(n) - ja_k(n) = -j\{a_k(n) + jb_k(n)\} \quad (8)$$

式8が示すように、実数と虚数を入れ替えた成分を有するベクトル $\hat{\phi}_k(n)$ がヒルベルト変換した瞬時スペクトラムのインデックス k の成分となる。

従って、求めた瞬時スペクトラム $\Phi(n)$ のインデックス k の周波数成分の実数と虚数成分を入れ替え、ヒルベルト変換した瞬時スペクトラム $\hat{\Phi}(n)$ が求まる。

続いて、ヒルベルト変換されたスペクトラム、すなわち、周波数域上のヒルベルト変換された信号を、Short Time IFTを用いて、周波数域から時間域への変換を施して、ヒルベルト変換した時間域の出力信号 $\hat{y}(n)$ を求める。

上記の第1と第2ステップは、瞬時スペクトラムの解析に使用する演算子と位相推移演算子を一つにまとめることで統合できる。従って、周波数域ヒルベルト変換演算子 \hat{W}_N^{-rk} が次のように求まる。

$$\hat{W}_N^{-rk} = \begin{cases} \exp\left\{-j\left(\frac{2\pi rk}{N} + \frac{\pi}{2}\right)\right\}, & \text{if } 0 < k < \frac{N}{2} \\ 0, & \text{if } k = 0, \frac{N}{2} \\ \exp\left\{-j\left(\frac{2\pi rk}{N} - \frac{\pi}{2}\right)\right\}, & \text{if } \frac{N}{2} < k < N \end{cases} \quad (9)$$

ここに、 j は複素単位、 $j = \sqrt{-1}$ 。

(証明：周波数域ヒルベルト変換演算子の存在)

式9右辺第1行の定数 $\pi/2$ は、瞬時スペクトラムの $0 < k < N/2$ のすべてのインデックス k の成

分 $\phi_k(n)$ を $\pi/2$ radian の位相回転を与える. この第1行は, 演算子 \widehat{W}_N^{-rk} が純虚数の変数の唯一の複素指数関数からなり, 周波数域上のヒルベルト変換の振幅ひずみがないことを同時に示唆している.

式9右辺の残りの第2,3行は, 出力信号 $\widehat{y}(n)$ が物理的に存在するために定義される. すなわち, 出力信号 $\widehat{y}(n)$ を表す式3に, $\widehat{\phi}_k(n)$ を代入すれば次式が得られる.

$$\begin{aligned} \widehat{y}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{\phi}_k(n) W_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N} \widehat{\phi}_0(n) W_N^0 + \frac{1}{N} \widehat{\phi}_{N/2}(n) W_N^{nN/2} \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N/2-1} \left\{ \widehat{\phi}_k(n) W_N^{nk} + \widehat{\phi}_{N-k}(n) W_N^{n(N-k)} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

式10において, 演算子 W_N^0 と $W_N^{nN/2}$ は, いかなる時刻 n においても, それぞれ値1および, 1あるいは -1の純実数となる. 成分 $\widehat{\phi}_0(n)$ と $\widehat{\phi}_{N/2}(n)$ が非ゼロならば, 対応する成分 $\widehat{\phi}_0(n)$ と $\widehat{\phi}_{N/2}(n)$ は純虚数となり, 変換出力信号 $\widehat{y}(n)$ が複素数に発散してしまう. 従って, 演算子 \widehat{W}_N^{-rk} は式9で定義するようにインデックス k が0と $N/2$ ではゼロ以外の値をとりえない.

演算子 $W_N^{n(N-k)}$ は, W_N^{nk} と複素共役で, $W_N^{n(N-k)}$

$= W_N^{nk}$ と記述できるので, $\widehat{\phi}_{N-k}(n)$ が $\widehat{\phi}_k(n)$ の複素共役の場合に限り, 式10の中括弧のすべての項は純実数となる. 事実, $\widehat{\phi}_{N-k}(n)$ は式11に示すように与えられる.

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{N-k}(n) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) h(n-r) \exp \left[-j \left\{ \frac{2\pi r(N-k)}{N} - \frac{\pi}{2} \right\} \right] \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) h(n-r) \exp \left[j \left\{ \frac{2\pi rk}{N} + \frac{\pi}{2} \right\} \right] \\ &= \overline{\widehat{\phi}_k(n)}. \end{aligned} \quad (11)$$

従って, 変換出力信号 $\widehat{y}(n)$ は, 次に示すように純実数となる.

$$\begin{aligned} \widehat{y}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N/2-1} \left\{ \widehat{\phi}_k(n) W_N^{nk} + \widehat{\phi}_{N-k}(n) W_N^{n(N-k)} \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N/2-1} \left\{ \widehat{\phi}_k(n) W_N^{nk} + \overline{\widehat{\phi}_k(n)} \overline{W_N^{nk}} \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N/2-1} 2 \operatorname{Real} \left\{ \widehat{\phi}_k(n) W_N^{nk} \right\}, \quad \text{QED.} \end{aligned} \quad (12)$$

4. 回路構成と処理特性

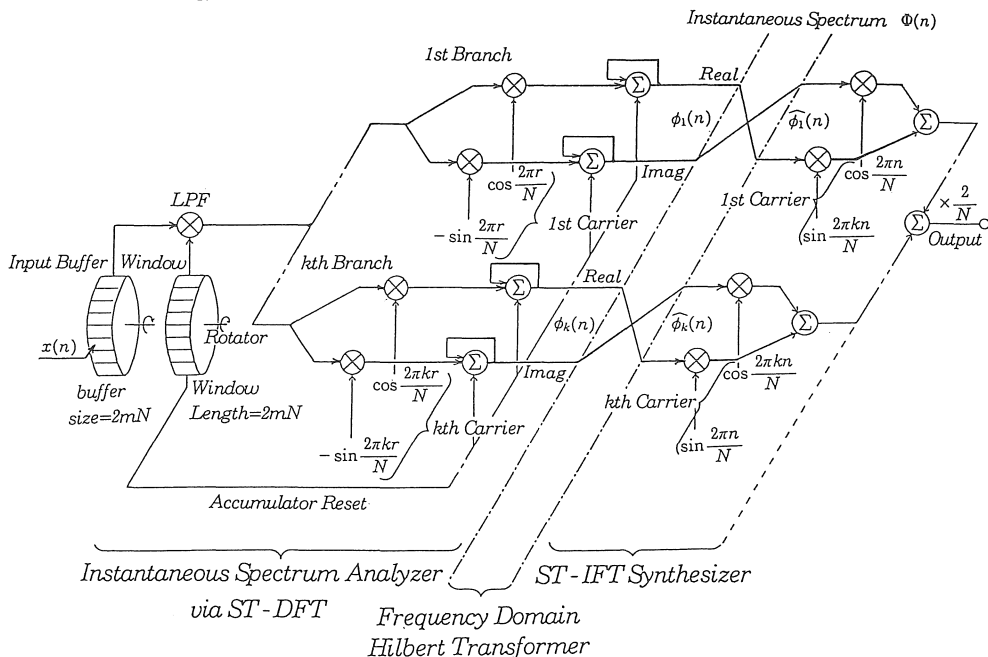


図3 Short Time DFTヒルベルト変換器の回路構成
Fig. 3 Configuration of the Short Time DFT Hilbert transformer.

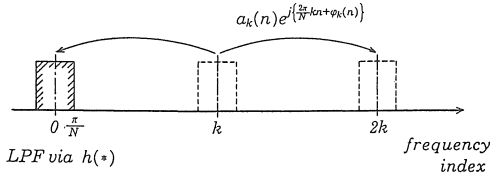


図4 Short Time DFTにおける瞬時スペクトラム解析
Fig. 4 Instantaneous spectrum analysis during the Short Time DFT.

4.1 回路構成

図3にShort Time DFTヒルベルト変換器の原理的な回路構成を示す。Short Time DFTヒルベルト変換器は、主要な3機能ブロックに分類できる。

第1の機能ブロックは、瞬時スペクトラムの成分 $\phi_k(n)$ を求めるShort Time DFTアナライザで構成される。ここに、 k は1, 2, ..., $N/2-1$. 式2に示すように、瞬時スペクトラムの成分 $\phi_k(n)$ は、内積 $x(r)W_N^{-rk}$ とウィンドウ関数 $h(n)$ の畳み込みで与えられている。

この内積 $x(r)W_N^{-rk}$ は、入力信号 $x(r)$ と正規化角周波数 $2\pi k/N$ の複素キャリア W_N^{-rk} との振幅変調波と解釈できる。更に、 $\{x(r)W_N^{-rk}\}$ とウィンドウ関数 $h(n)$ との畳み込みは、振幅変調波 $\{x(r)W_N^{-rk}\}$ の低域フィルタリングと解釈できる。それ故、図4に示すように複素キャリア W_N^{-rk} の周波数 $2\pi k/N$ radianを中心として帯域幅 $2\pi/N$ radianの成分が、ウィンドウ関数 $h(n)$ の低域フィルタの出力信号として出力される。従って、図3に示す第1の機能ブロックの回路構成が決定される。

第2の機能ブロックは、周波数域ヒルベルト変換器として作動し、瞬時スペクトラムの成分 $\phi_k(n)$ の実数と虚数とを入れ替える機能を有している。この第2ブロックは、機能としては重要であるが、図3に示すように2本の交差する針金だけで実現できる簡単な回路構成をとる。第1と第2ブロックは、周波数インデックス方向に統合でき、第1のブロックにおける入力信号の振幅変調において、変調信号 W_N^{-rk} の代わりに \widehat{W}_N^{-rk} を使用すればヒルベルト変換した瞬時スペクトラム成分 $\widehat{\phi}_k(n)$ を直接に求めることもできる。

最後の第3の機能ブロックは、Short Time IFTシンセサイザとして構成され、ヒルベルト変換した瞬時スペクトラム $\widehat{\Phi}(n)$ から時間域の変換信号を合成する。第1のブロックと同様に、Short Time

IFTは周波数インデックス方向に、ヒルベルト変換した成分 $\widehat{\phi}_k(n)$ と、正規化角周波数 $2\pi k/N$ の複素キャリア W_N^{rk} との振幅変調を遂行している。

4.2 Short Time DFTヒルベルト変換器の単位サンプル応答

Short Time DFTヒルベルト変換器の単位サンプル応答 $I_s(n)$ は、入力信号を $x(0) = 1$ とおけば、式6, 9, 10から式13のように求まる。但し、ここでは、ナイキストウィンドウ関数 $h(*)$ は、無限フレーム長とする。

$$I_s(n) = \begin{cases} \frac{2}{N} \frac{\sin(2\pi n/N)}{1 - \cos(2\pi n/N)} \frac{\sin(\pi n/N)}{\pi n/N} \\ = \frac{2}{\pi n} \cos(\pi n/N), & n \text{ が奇数の場合} \\ 0, & n \text{ が偶数の場合} \end{cases} \quad (13)$$

既に議論したように式9で定義する周波数域ヒルベルト変換演算子は完全に処理ひずみを排除している。また、式13における項 $\sin(\pi n/N)/(\pi n/N)$ で示されるナイキストウィンドウ関数が無限フレーム長の場合は、周知のように理想低域フィルタとして機能する。これらの理由から、単位サンプル応答、式13は、理想ヒルベルト変換の単位サンプル応答を与えることが理解できる。

無限フレーム長のナイキストウィンドウ関数は、処理遅延が無限であるなど実用的な観点からは問題が多く、有限フレーム長の実験的なDecimationフィルタが使用される必要がある。しかし、理想ヒルベルト変換の理論単位サンプル応答が、Short Time DFTヒルベルト変換器の単位サンプル応答で与え得ることは興味深いところであろう。

比較検討のため、式14にRabinerらのminimax FIRヒルベルト変換器（以降minimaxヒルベルト変換器と略す）の単位サンプル応答を、式14に示す。

$$I_m(n) = \begin{cases} \frac{2 \sin^2(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{1 - \cos(\pi n)}{\pi n} = \frac{2}{\pi n}, \\ n \text{ が奇数の場合} \\ 0, & n \text{ が偶数の場合} \end{cases} \quad (14)$$

式13と14を比較すれば明らかになるように、Short Time DFTヒルベルト変換器は、minimax

ヒルベルト変換器の拡張形となっている。すなわち,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_s(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 \cos(\pi n/N)}{\pi n} = \frac{2}{\pi n} = I_m(n) \quad (15)$$

n は任意な整数

Short Time DFTヒルベルト変換器は、離散時間信号すなわちデジタル信号処理を対象にしているが、minimax ヒルベルト変換器は、連続時間信号すなわちアナログ信号処理の延長線上にあると考えられる。

4.3 ヒルベルト変換器内および送受信ヒルベルト変換器間の処理同期誤差問題

(a) ヒルベルト変換器内の処理遅延

理想ヒルベルト変換器は、Short Time DFTとShort Time IFTを組み合わせることで実現できることを、既に議論した。しかし、使用するShort Time DFTとShort Time IFTのタイムベースを、完全に一致させることは、それぞれの処理遅延などの要因で難しい。あえてタイムベースを一致させることは、いたずらに遅延時間の増大を招き好ましくない。ここでは、Short Time DFTとShort Time IFT間のタイムベース間の同期誤差が処理に及ぼす影響を与えるかを、議論する。

今、DSP 処理遅延を一般化し、図5に示すように、解析部のタイムベースが、合成部に対して δ サンプル時間だけ遅れている場合を想定する。解析部のタイムベースを基準にとれば、Short Time DFTヒルベルト変換器の出力 $\tilde{y}(n)$ は、次のように与えられる。

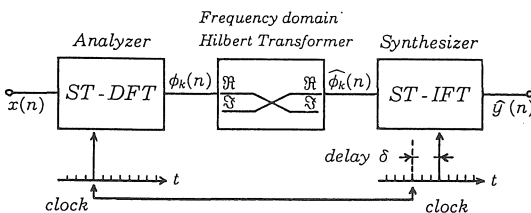


図5 Short Time DFTヒルベルト変換器内のShort Time DFT解析器とShort Time IFT合成器における同期誤差 δ

Fig.5 Synchronization error δ between the Short Time DFT analyzer and Short Time IFT synthesizer in the same Short Time DFT Hilbert transformer.

$$\tilde{y}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\phi}_k(n) W_N^{(n-\delta)k} \quad (16)$$

ヒルベルト変換された瞬時スペクトラム成分 $\hat{\phi}_k(n)$ の存在性は、既に3.で証明したところである。換言すれば、ヒルベルト変換された瞬時スペクトラムの代わりに、ヒルベルト変換された信号の瞬時スペクトラムを考える妥当性は、Short Time DFTの定義式の線型性から容易に理解できよう。従って、ヒルベルト変換された入力信号 $\hat{x}(*)$ を用いて、式16を次のように書き改めることができる。

$$\tilde{y}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{x}(r) h(n-r) W_N^{-rk} \right\} W_N^{(n-\delta)k}$$

ウィンドウ関数 $h(*)$ が有限長であることに留意しつつ、総和の順序を入れ替えられると、式16は次のように変形できる。

$$\tilde{y}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{x}(r) h(n-r) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-\delta-r)k}$$

上式の k の総和は、演算子 W_N の完全和を表しているため、 $\tilde{y}(n)$ は、次のように簡単になる。

$$\tilde{y}(n) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n-\delta-uN) h(\delta+uN)$$

ここに、 u は任意な整数

あるいは、時間 δ だけ遅延した出力信号 $\tilde{y}(n+\delta)$ は、最終的に、式17のように表現されることが知れる。

$$\tilde{y}(n+\delta) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n-uN) h(uN) = \hat{x}(n) \quad (17)$$

合成部の出力として、ヒルベルト変換された信号 $\hat{x}(n)$ が、 δ だけ遅延して出力されることを示す。解析部と合成部のタイムベース間の誤差 δ は、出力が遅延すること以外には何らの影響をヒルベルト変換機能に与えないことが理解できる。

周波数域におけるヒルベルト変換、すなわち瞬時スペクトラム成分ベクトルを位相空間において、

$\pi/2$ radian 回転することは、瞬時スペクトラムを求めるShort Time DFTにおける処理ならびに合成に使用するShort Time IFTの処理のタイムベースに無関係に、ヒルベルト変換機能を完全に保証する強力な信号処理手段であることが証明できる。

詳細の説明は別途の機会にゆだねることとしたいが、従来のDFTとIFTでは、演算定義域が、入力サンプリングデータと1対1の対応をしており、入力データが処理区間とずれるとき、いわゆるフレーム同期誤差となりスペクトラムが大幅に異なる現象が観測される。反面、Short Time DFTとShort Time IFTでは、入力データと演算定義域との時間的な相違はスペクトラム解析結果の遅延量として現れるのみで、スペクトラムの誤差は生じることはない。この特徴は、Short Time DFTで与えられる瞬時スペクトラムの概念の固有性に基づくものであることは、上記の証明からも理解できよう。

(b) ヒルベルト変換器間の処理同期誤差

通信システムにおいて、ヒルベルト変換器が単独に使用されることは少なく、送信と受信サイトにそれぞれ設置されペアで信号処理機能を果たし、通信システムを構築することが多い。かかる場合、送受信サイトのそれぞれのヒルベルト変換器のタイムベースを、完全に一致させることは至難の技である。現行のISDN (INS)網において、局間同期が大きな問題になっていることから、処理同期の技術的問題の難しさが理解できよう。

ここでは異なった観点、すなわち、図6に示すように、両サイトに設置されているShort Time DFTヒルベルト変換器が、互いに非同期に作動する場合、いかなる挙動を示すかを議論する。

送受信間の同期が完全にとれている場合の、受信サイトのShort Time DFTへの入力信号を $x(n)$ と

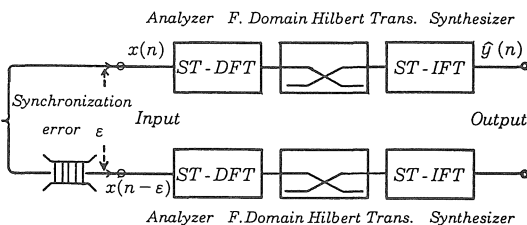


図6 送受信サイトのShort Time DFTヒルベルト変換器間の同期誤差 ϵ

Fig. 6 Synchronization error ϵ between source and destination Short Time DFT Hilbert transformers.

する。同期がとれず、受信サイトに時間 ϵ の遅延でShort Time DFTに入力される場合に求まる瞬時スペクトラム $\tilde{\phi}_k(n)$ を考える。

$$\tilde{\phi}_k(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r-\epsilon)h(n-r)W_N^{-rk} \quad (18)$$

式18において、受信側のShort Time DFTのタイムベース n と送信側のタイムベース r 間の同期誤差は、一般化して、受信信号の時間遅れ項 ϵ で表現している。

時刻 $n+\epsilon$ の瞬時スペクトラム $\tilde{\phi}_k(n+\epsilon)$ は、式18から次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_k(n+\epsilon) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r-\epsilon)h(n+\epsilon-r)W_N^{-rk}W_N^{+\epsilon k} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r-\epsilon)h\{n-(r-\epsilon)\}W_N^{-(r-\epsilon)k}W_N^{-\epsilon k} \end{aligned}$$

ここで、変数変換 $r-\epsilon=s$ を施せば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_k(n+\epsilon) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} x(s)h(n-s)W_N^{-sk}W_N^{-\epsilon k} \\ &= \phi_k(n)W_N^{-\epsilon k} = \phi_k(n-\epsilon) \end{aligned} \quad (19)$$

式19の因子 $W_N^{-\epsilon k}$ は、時刻 n に対して定数、かつ周波数に対して線型である。これは、因子 $W_N^{-\epsilon k}$ が、周知のように、 ϵ だけの遅延を与える作用を果たしていることを意味する。

すなわち、送受信間の同期誤差 ϵ が存在する場合の受信側の瞬時スペクトラム $\tilde{\phi}_k(n)$ は、 ϵ の時間遅れを伴うものの、送受信間の同期が正しくとれている場合の瞬時スペクトラム $\phi_k(n)$ に、正確に一致することを式19は示している。ヒルベルト変換処理を周波数域で行う通信システムを採用する限り、送受信サイト間の同期誤差は、処理機能に影響を与えないことが知れよう。

5. シミュレーション実験結果

Short Time DFTヒルベルト変換器が正しく機能することを、単位サンプル応答と位相推移特性についてコンピュータシミュレーションから検証する。

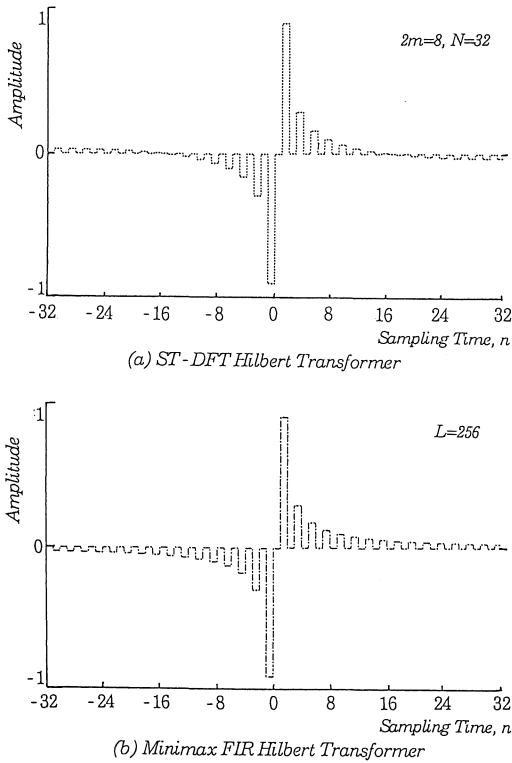


図7 Short Time DFTヒルベルト変換器(a)と, min-imax ヒルベルト変換器(b)の単位サンプル応答の比較

Fig. 7 Comparison of the unit sample response between Short Time DFT ($2m=8, N=32$), and minimax Hilbert transformers ($L=256$).

すべてのシミュレーション実験は, 計算誤差と処理誤差を切り分けるために, 単精度演算で64ビットと計算精度の高いスーパーコンピュータCRAY X-MP/14seを使用し, 数値計算上のラウンドオフ誤差の影響を排除するように考慮を払い実行した。

図7にShort Time DFTとminimax ヒルベルト変換器の単位サンプル応答を示す。図7(a)はShort Time DFTヒルベルト変換器の応答を, 図7(b)はminimax ヒルベルト変換器の応答を示す。図7に見られるように, Short Time DFTとminimax ヒルベルト変換器の単位サンプル応答には, 顕著な差異が存在する。

ここに, Short Time DFTのナイキストフィルタのフレーム数 $2m$ を8, フレーム長 N を32に設定している。8フレーム長に打ち切ったナイキストウィンドウ関数を使用した場合のShort Time DFTヒルベルト変換器の単位サンプル応答は, 式13の時刻 $-4N \leq n \leq 4N$ の応答に一致する。

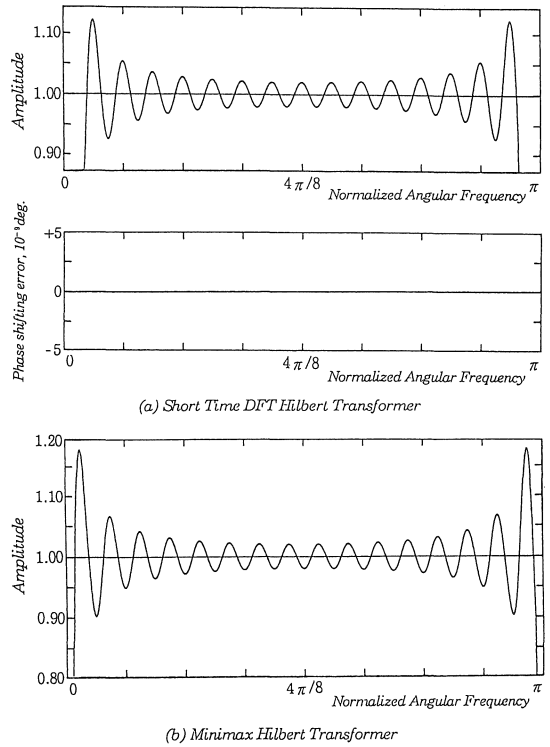


図8 Short Time DFTヒルベルト変換器とminimax ヒルベルト変換器の振幅と位相推移誤差の周波数応答

Fig. 8 Amplitude and phase-shifting error frequency response both of the Short Time DFT and minimax Hilbert transformers.

一方, minimax ヒルベルト変換器のFIR フィルタ長 L は256段に設定し, Short Time DFTのウィンドウ関数長256 ($2mN=8 \times 32$) に一致させ比較の公正を期した。

図7(a)に示すように, Short Time DFTヒルベルト変換器の単位サンプル応答は, 包絡の振動に特徴がある。包絡漸近線は, 図7(b)に示すminimax ヒルベルト変換器の単位サンプル応答に一致する。この単位サンプル応答の包絡の振動は, 式13の項 $\cos(\pi n/N)$ が原因になっている。すなわち, Short Time DFTヒルベルト変換器の単位サンプル応答の包絡は, 周期 N で $2mN$ のサンプリング全期間で振動している。

一方, minimax ヒルベルト変換器の単位サンプル応答は, 原点の両側において, それぞれ単調減少し, L サンプリング全期間において包絡の振動はない。

Short Time DFTヒルベルト変換器とminimax ヒルベルト変換器の, 位相推移と振幅の周波数応答

図8に示す。

検証にあたり、両ヒルベルト変換器の処理量を等しく保つようにした。すなわち、Short Time DFTヒルベルト変換器では、フレーム数 $2m \times$ フレーム内サンプル数 N の値、 $2mN$ をパラメータにとり、minimax ヒルベルト変換器では、トランスバーサルフィルタの段数 L をパラメータにとり、図8では、 $2mN=L=64$ について示す。

また、出力信号の解析には、ほぼ無限フレーム長と考えられるフレーム数 $2m=128$ 、フレーム長 $N=512$ のナイキストウィンドウ関数を採用し、Short Time DFT解析の能力を理想的なものと考えられる程度まで十分高め、処理誤差の介入を防止するように心掛けた。

図8(a)に、 $2m=2$ 、 $N=32$ の場合について、Short Time DFTヒルベルト変換器の位相推移誤差を示す。これから、位相推移特性は、全周波数域においてほぼ完全な $-\pi/2$ radianであり、位相推移誤差は 1×10^{-9} 度以下であることが知れよう。同図8(a)から、振幅特性の最大振幅偏差が1.009dB以内に収まり、正規化角周波数 (Normalized angular frequency) 0.045π と 0.955π radian において真値1.1232の最大誤差を呈することが明らかになる。

一方、同一な処理量のminimax ヒルベルト変換器、 $L=64$ のminimax ヒルベルト変換器の振幅周波数応答を、図8(b)に示す ($L=64$ のminimax ヒルベルト変換器の位相推移周波数応答は、ほぼShort Time DFTヒルベルト変換器のそれに一致し、位相推移誤差は、 1×10^{-9} 度以下であるので、図は省

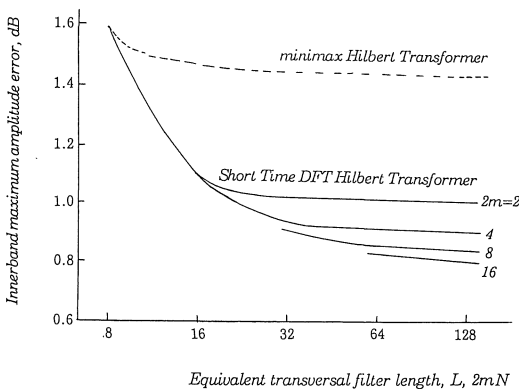


図9 帯域内最大振幅誤差—等価トランスバーサルフィルタ長特性

Fig. 9 Innerband maximum amplitude error vs. equivalent transversal filter length, L or $2mN$.

略する)。振幅誤差は、1.4323dB以内に収まり、正規化角周波数 0.015π 、 0.985π radian において真値1.1793の最大誤差を呈する。

Short Time DFTヒルベルト変換器の振幅誤差がminimax ヒルベルト変換器のそれより小さくなることは、Short Time DFTヒルベルト変換器が帯域 $[\pi/N \sim (N-1)\pi/N]$ radian を対象にし、minimax ヒルベルト変換器が帯域 $[0 \sim \pi]$ radian を対象にしていることに由来していると考えられる。

ヒルベルト変換器の処理量を表すトランスバーサルフィルタ段数 (Equivalent transversal filter stage number) に対する振幅誤差の最大値を、図9にプロットする。Short Time DFTヒルベルト変換器の振幅誤差は、フレーム数 $2m$ がいかなる値であろうとも、minimax ヒルベルト変換器の振幅誤差を超えることはない。

最大振幅誤差は、処理量を多くしても、あまり改善されず、どちらかと言えば、 $L=2mN=32 \sim 64$ 以上では、minimax ヒルベルト変換器とShort Time DFTヒルベルト変換器の振幅誤差の処理量に対する改善度は飽和してゆく傾向を、図9は示している。

6. むすび

瞬時スペクトラムの適用として、ヒルベルト変換器の構成とその特性を論じた。ヒルベルト変換器は、位相推移量が90度、振幅が0周波数を除いて単位である特性を要求する機能素子であるが、瞬時スペクトラムという新しいデジタル信号処理(DSP)概念を用いて、厳密な意味で構成できることを示した。

Short Time DFTは瞬時スペクトラムの存在を明らかにすると共に、瞬時スペクトラム概念を適用して構成したヒルベルト変換の位相推移誤差が 1×10^{-9} 度以下となり、従来標準とされているRabinerらのminimax ヒルベルト変換器と同程度の精度を有することを、明らかにした。

Short Time DFTヒルベルト変換器の振幅誤差は、1.01dB以下であり、minimax ヒルベルト変換器の誤差、1.4dBを下回ることを、コンピュータシミュレーション実験から実証できた。このレベルの振幅誤差ならば、このままでも、実用的には十分な機能を備えていると考えられる。

以上述べたように、Short Time DFTヒルベルト変換器が優れた特性を示すことができる理論背景の

主な要因として、瞬時スペクトラム概念の採用が挙げられよう。すなわち、Short Time DFTは、周波数分解能を f_s/N (f_s はサンプリング周波数)と規定したまま、時間分解能をDSPの極限值である1サンプリング期間まで高められることに由来する。minimax ヒルベルト変換器は、アナログ信号の延長線上にある稠密な連続な時間関数としてヒルベルト変換をとらえ設計されているが、Short Time DFTヒルベルト変換器は、DSPに適した処理形式すなわち離散時間信号のみを扱うシステムとして設計されている。この、設計思想の相違が、位相推移の特性の優劣を決定していると考えられる。

更に、DSPに不可避な処理遅延あるいは処理同期が、Short Time DFT系においては、処理機能そのものには関与しないことが、理論解析からも示すことができた。Short Time DFTヒルベルト変換器は、システム間の同期を不要とするため、機能素子として通信システムに自由に組み込み使用できることが保証される。

今後は、Short Time DFT系において、重要な機能を実現しているDecimationフィルタの改良等の基礎検討を通し瞬時スペクトラムの概念を確立して

ゆくと共に、幅広い通信システムの機能素子の実現へ向けての瞬時スペクトラムの適用を検討してゆく。

文献

- (1) Daikoku K. and Suwa K.: "RZ SSB Transceiver with Equal-Gain Combiner for Speech and Data Transmission", GLOBECOM'88, Fort Lauderdale, FL. pp.26-4-1 ~ 26-4-5, Nov.-Dec. 1988.
- (2) Rabiner L. R. and Schafer R. W.: "On the Behavior of minimax FIR Digital Hilbert Transformers", Bell Syst. Tech. J., 53, 2, pp.363-390, Feb. 1974.
- (3) Kishi M.: "A Proposal of Short Time DFT Hilbert Transformers and its Configuration", Trans. IEICE, E71, 5, pp.466-468, May 1988.
- (4) Kishi M.: "The Properties and Configuration of the Short Time DFT Hilbert Transformers", IEEE ICASSP89, Glasgow, Scotland, Proc. 2, D4.10, pp.1019-1022, May 1989.

(受理 平成4年3月20日)