パソコンによる数学定数の高精度計算

秦野　和郎・汪　及鈺・竹松　英夫

High Precision Calculation of Mathematical Constants using a Personal Computer

Kazuo HATANO, Nai-Yuh WAUNG and Hideo TAKEMATSU

The high precision mathematical constants such as π, e, γ are calculated on our personal computers. The MULTI 16 with CP/M monitor and FORTRAN compiler is employed. The first 2500 decimal places of π, e and the first 600 decimal places of γ (Euler constants) are presented in this article.

1．まえがき

最近16ビットのパーソナルコンピュータが普及しはじめ，相当な計算能力を持つ計算機を手近に使えるようになってきた。使用しうる計算機言語も初期のパソコンのBASIC一辺倒からFORTRAN，COBOLなどの実用言語が普及する兆しをみせている。

筆者らの研究室でも昭和56年6月，三菱電機の16ビットパソコンMULTI 16を導入し，同時にCP/M-86(モニター)，FORTRAN(コンパイラ)を購入した。これにより，従来の大型，中型計算機と同じような感覚でパソコンを使うことができる。勿論，計算速度，記憶容量の点で大型計算機とは比較にならないが個人的に手近に使えるという利点は極めて大きい。

大型，中型計算機では信頼性が重要視されるため，最近の計算機の記憶装置は1ビットの誤り自動訂正，2ビットの誤り検出の機能を持っている。これに対してパソコンは安価という事が優先されるためMULTI 16に限らず多くのパソコンでは記憶装置の誤り検出を行っていない。そのような計算機が長時間の使用に耐えるかどうか心配である。そこで答がわかっているか，或いは正誤を容易に確認することができて，しかも長時間の計算を要する問題として，いくつかの数字定数の高精度計算を試行した。

この計算を行うためには，多倍長計算を実行するためのプログラムを作製し，計算手順を構成しなければならない。その種の問題の一般的困難さはたとえば文献[1]p.205～p.217に述べられている。又，計算の詳細を述べた文献は少ない。

本稿では筆者らの計算に使った計算法を述べる。

2．Ludolphの数，πの計算（円周率）

他の定数の計算と異なりπの計算についてはいくつかの文献[2),3)]があり又，容易に入手できる形で10万桁の結果が公表されている[2)]。

πの計算には多くの公式が知られているが[4)]ここでは少ない項数ですむことからGaussの公式，

$$\pi=48\tan^{-1}\frac{1}{18}+32\tan^{-1}\frac{1}{57}-20\tan^{-1}\frac{1}{239} \qquad (2.1)$$

を使用した。

さて，上式を使ってπを10進d桁程度の精度で求めたいとする。

$$\tan^{-1}\frac{1}{m}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)m^{2i+1}} \qquad (2.2)$$

である。右辺の最初の部分和を

$$g_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{(2i+1)m^{2i+1}} \qquad (2.3)$$

とおく。$\tan^{-1}(1/m)$を10進d桁程度の精度で計算するには，

$$\left|\tan^{-1}\frac{1}{m}-g_n\right|<\frac{1}{10^d} \qquad (2.4)$$

を満足するようにnをきめてg_nを計算すればよい。$m\geqq 2$とすると

$$\left|\tan^{-1}\frac{1}{m}-g_n\right|=\left|\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)m^{2i+1}}\right|$$

$$<\frac{1}{2n+3}\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^{2i+1}}<\frac{1}{m^{2n+3}} \qquad (2.5)$$

である。従って

$$\frac{1}{m^{2n+3}}<\frac{1}{10^d} \qquad (2.6)$$

より，nは

$$n>\frac{1}{2}\left(\frac{d}{\log m}-3\right) \tag{2.7}$$

を満足すればよいことがわかる。

次に式（2.3）で与えられるg_nを計算する手順を述べる。

$$G_k=(-1)^k m^{2k+1}\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^i}{(2i+1)m^{2i+1}} \tag{2.8}$$

とおく。上式から

$$G_{k-1}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{m^2}G_k \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} G_n=1 \\ G_0=mg_n \end{cases} \tag{2.10}$$

である。従ってg_nを求めるには$G_n=1$とおき，漸化式（2.9）を$k=n$，$n=1$，……，2，1に対して適用し，得られたG_0を m で割ればよい。

漸化式（2.9）を一律に10進 d 桁で計算せずに，各 k に対して計算桁数を制御すると必要な計算量を半分程度に減らすことができる。

式（2.8）右辺にあらわれる

$$\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^i}{(2i+1)m^{2i+1}}=\bar{G}_k \tag{2.11}$$

すなわち，g_nの最後の部分和は容易に確認しうるように

$$|\bar{G}_k|<\frac{1}{m^{2k+1}} \tag{2.12}$$

をみたす。このことからG_kの必要な10進有効桁数を s とすると

$$d-s<(2k+1)\log m \tag{2.13}$$

である。従って漸化式（2.9）の計算は各 k に対して $s>d-(2k+1)\log m$ なる s を算出し，10進 s 桁程度で行えば十分であることがわかる。

$m=18, 57, 239$に対して上の手順を適用すれば式(2.1)からπを得ることができる。

以上のようにして得られたπの近似値をπ^*とする。計算が正しく行なわれたかどうかを確かめるにはπ^*のπに対する誤差

$$\varepsilon=\pi-\pi^* \tag{2.14}$$

を評価してみればよい。

$$\cos\frac{\pi^*}{2}=\cos\frac{\pi-\varepsilon}{2}\fallingdotseq\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.15}$$

すなわち，$\varepsilon\fallingdotseq 2\cos(\pi^*/2)$である。従って$\varepsilon$を知るには d 桁を若干上回る程度の桁数で$2\cos(\pi^*/2)$を計算すればよい。

$$\cos x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \tag{2.16}$$

である。

$$h_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \tag{2.17}$$

とおく。cos x を10進 d 桁程度の精度で計算するには，

$$|\cos x-h_n|<\frac{1}{10^d} \tag{2.18}$$

を満足するように n をきめてh_nを計算すればよい。

$$|\cos x-h_n|<\left|\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}\right|$$

$$<\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2n+2}\right)^2}$$

であるが n は十分に大きいとして $x<n+1$ とすると，

$$|\cos x-h_n|<\frac{x^{2n}}{(2n)!}<\frac{1}{10^d} \tag{2.19}$$

である。

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{10^d} \tag{2.20}$$

において，(2n)!に Stirling の公式[5]を適用し両辺の常用対数をとると

$$2n\log x-\frac{1}{2}\log(4\pi n)-2n\log(2n)$$
$$+2n\log e=-d \tag{2.21}$$

となる。これを満足するような n を Newton-Raphson 法[6]を使って求める。すなわち，

$$\begin{cases} f(n)=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\log(2n)-2n\log(ex) \\ \qquad +\frac{1}{2}\log(2\pi)-d \\ f'(n)=\left(2+\frac{1}{2n}\right)\ln 10+2\log\frac{2n}{ex} \end{cases} \tag{2.22}$$

とし，$n_0=d/2$を初期値として反復式

$$n_{i+1}=n_i-\frac{f(n_i)}{f'(n_i)} \tag{2.23}$$

を$|n_{i+1}-n_i|<1$が満足されるまで適用する。そのようにして得られた結果を若干上回る整数を式（2.19）における n とすればよい。

以上のようにして n をきめて式（2.17）を計算するために

$$T_k=(-1)^k\frac{(2k)!}{x^{2k}}\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \tag{2.24}$$

とおく。この式から

$$T_{k-1}=1-\frac{x^2}{(2k-1)(2k)}T_k \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} T_n=1 \\ T_0=h_n \end{cases} \tag{2.26}$$

を容易に得ることができる。従ってh_nを求めるには$T_n=1$とおき漸化式（2.25）を$k=n$，$n-1$，……，2，1に対して適用すればよい。

漸化式（2.25）を計算するときに，各 k に応じて桁数制御をすると必要な計算量を減らすことができる。

式（2.24）右辺にあらわれる

$$\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2^i)!}=\bar{T}_k \tag{2.27}$$

すなわちh_nの最後の部分和は$x<k+1$のとき容易にわかるように

$$|\bar{T}_k|<\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} \tag{2.28}$$

をみたす。従ってT_kの必要な10進有効桁数をsとすると

$$d-s<(2k-2)\log x-\frac{1}{2}\log(4\pi(k-1))$$
$$-(2k-2)\log(2k-2)+(2k-2)\log e \tag{2.29}$$

となる。ここで上式を得るのに$(2k-2)!$にStirlingの公式を適用した。以上から式（2.25）の計算は各kに対して

$$s>d-(2k-2)\log(ex)+\frac{1}{2}\log(4\pi(k-1))$$
$$+(2k-2)\log(2k-2) \tag{2.30}$$

```
********** LUDOLPH CONSTANT 'PI' ******** NDIG= 2500 ******** LENG=  630 ********
*                                                                               *
*      3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510  (   1)    *
*        58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679  (   2)    *
*        82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128  (   3)    *
*        48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196  (   4)    *
*        44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091  (   5)    *
*        45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273  (   6)    *
*        72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436  (   7)    *
*        78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094  (   8)    *
*        33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548  (   9)    *
*        07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912  (  10)    *
*                                                                               *
*        98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798  (  11)    *
*        60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132  (  12)    *
*        00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872  (  13)    *
*        14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235  (  14)    *
*        42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960  (  15)    *
*        51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859  (  16)    *
*        50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193 11881  (  17)    *
*        71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691 47303  (  18)    *
*        59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778  (  19)    *
*        18577 80532 17122 68066 13001 92787 66111 95909 21642 01989  (  20)    *
*                                                                               *
*        38095 25720 10654 85863 27886 59361 53381 82796 82303 01952  (  21)    *
*        03530 18529 68995 77362 25994 13891 24972 17752 83479 13151  (  22)    *
*        55748 57242 45415 06959 50829 53311 68617 27855 88907 50983  (  23)    *
*        81754 63746 49393 19255 06040 09277 01671 13900 98488 24012  (  24)    *
*        85836 16035 63707 66010 47101 81942 95559 61989 46767 83744  (  25)    *
*        94482 55379 77472 68471 04047 53464 62080 46684 25906 94912  (  26)    *
*        93313 67702 89891 52104 75216 20569 66024 05803 81501 93511  (  27)    *
*        25338 24300 35587 64024 74964 73263 91419 92726 04269 92279  (  28)    *
*        67823 54781 63600 93417 21641 21992 45863 15030 28618 29745  (  29)    *
*        55706 74983 85054 94588 58692 69956 90927 21079 75093 02955  (  30)    *
*                                                                               *
*        32116 53449 87202 75596 02364 80665 49911 98818 34797 75356  (  31)    *
*        63698 07426 54252 78625 51818 41757 46728 90977 77279 38000  (  32)    *
*        81647 06001 61452 49192 17321 72147 72350 14144 19735 68548  (  33)    *
*        16136 11573 52552 13347 57418 49468 43852 33239 07394 14333  (  34)    *
*        45477 62416 86251 89835 69485 56209 92192 22184 27255 02542  (  35)    *
*        56887 67179 04946 01653 46680 49886 27232 79178 60857 84383  (  36)    *
*        82796 79766 81454 10095 38837 86360 95068 00642 25125 20511  (  37)    *
*        73929 84896 08412 84886 26945 60424 19652 85022 21066 11863  (  38)    *
*        06744 27862 20391 94945 04712 37137 86960 95636 43719 17287  (  39)    *
*        46776 46575 73962 41389 08658 32645 99581 33904 78027 59009  (  40)    *
*                                                                               *
*        94657 64078 95126 94683 98352 59570 98258 22620 52248 94077  (  41)    *
*        26719 47826 84826 01476 99090 26401 36394 43745 53050 68203  (  42)    *
*        49625 24517 49399 65143 14298 09190 65925 09372 21696 46151  (  43)    *
*        57098 58387 41059 78859 59772 97549 89301 61753 92846 81382  (  44)    *
*        68683 86894 27741 55991 85592 52459 53959 43104 99725 24680  (  45)    *
*        84598 72736 44695 84865 38367 36222 62609 91246 08051 24388  (  46)    *
*        43904 51244 13654 97627 80797 71569 14359 97700 12961 60894  (  47)    *
*        41694 86855 58484 06353 42207 22258 28488 64815 84560 28506  (  48)    *
*        01684 27394 52267 46767 88952 52138 52254 99546 66727 82398  (  49)    *
*        64565 96116 35488 62305 77456 49803 55936 34568 17432 41125  (  50)    *
*                                                                               *
*********************************************************************************
Stop - Program terminated.
```

図1　Ludolphの数，π

をみたすようなsを算出し，10進s桁程度で行えばよいことがわかる。

以上の手順でπを計算するためにFORTRANでプログラムを作製した。

MULTI 16のFORTRANでは2バイト整数と4バイト整数を使うことができる。そのような条件のもとでは多倍長計算は2^{15}を法として計算するのが最適である。しかしここでは，出力における2進10進変換（非常に時間がかかる）を避けるために10^4を法として計算した。

図1にMULTI 16で計算した2500桁のπの値を示す。所要時間は20時間位であった。(MULTI 16のFORTRANには計算時間を測定する機能がないため正確な所要時間は不明である)

3．Napierの数，eの計算（自然対数の底）

πの計算と異なりeの計算については文献が見当らない。又，1000桁程度の数値は容易に入手できるが[7]それ以上の桁数の数値は簡単には得られない。

Napierの数eは

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} \tag{3.1}$$

で与えられる。

$$e_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!} \tag{3.2}$$

とおく。eを10進d桁程度の精度で計算するには

$$|e-e_n|<\frac{1}{10^d} \tag{3.3}$$

となるようにnをきめてe_nを計算すればよい。

$$|e-e_n|=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i!}=\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\cdots\right\}$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^k}<\frac{1}{n!}<\frac{1}{10^d} \tag{3.4}$$

である。

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{10^d} \tag{3.5}$$

においてn!にStirlingの公式を適用し，両辺の常用対数をとると

$$\frac{1}{2}\log(2\pi n)+n\log n-n\log e=d \tag{3.6}$$

となる。これを満足するようなnをNewton-Raphson法を使って求める。

$$\begin{cases} f(n)=\frac{1}{2}\{\log(2\pi)+\log n\}+n\log n \\ \qquad -n\log e-d \\ f'(n)=\left(\frac{1}{2n}+1\right)\ln 10+\log\frac{n}{e} \end{cases} \tag{3.7}$$

とし，$n_0=d$を初期値とし，反復式(2.23)を$|n_{l+1}-n_l|<1$となるまで適用する。そのようにして得られた結果を若干上回る整数を式(3.4)におけるnとすればよい。

次に

$$T_k=k!\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i!} \tag{3.8}$$

とおく。この式から

$$T_{k-1}=1+\frac{1}{k}T_k \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} T_n=1 \\ T_0=e_n \end{cases} \tag{3.10}$$

なる漸化式を容易に得ることができる。従ってe_nを求めるには$T_n=1$とおき漸化式(3.9)を$k=n$，$n=1$，……，2，1に対して適用すればよい。

各kに対して漸化式(3.9)を計算する際の桁数制御は次のように行う。

式(3.8)の右辺にあらわれる，e_nの最後の部分和を$\bar{T}_k$とする。

$$\bar{T}_k=\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i!}$$

$$=\frac{1}{k!}\left\{1+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}\right\}$$

$$<\frac{1}{k!}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right\}<\frac{2}{k!} \tag{3.11}$$

である。従って10進d桁の精度を持つeを得るために，T_kの必要な有効桁数をsとすると

$$d-s<\log 2-\frac{1}{2}\log(2\pi k)-k\log k+k\log e \tag{3.12}$$

となる。以上から漸化式(3,9)の計算は各kに対して，

$$s>d-\log 2+\frac{1}{2}\log(2\pi k)+k\log k-k\log e \tag{3.13}$$

をみたすようなsを算出し，10進s桁程度で行なえばよいことがわかる。

以上のようにして得られたeの近似値をe^*とし，その誤差をεとする。

$$\varepsilon=e-e^* \tag{3.14}$$

である。

さて

$$\ln e^*=\ln(e-\varepsilon)=\ln e\left(1-\frac{\varepsilon}{e}\right)$$

$$=1+\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{e}\right)\fallingdotseq 1+\frac{\varepsilon}{e} \tag{3.15}$$

であるからe^*の誤差は

$$\varepsilon=e(\ln e^*-1) \tag{3.16}$$

となる。従ってeの計算が正しく行なわれたかどうかをみるにはd桁を若干上回る桁数で$e(\ln e^*-1)$を計算してみればよい。

$$\ln x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2i+1} \tag{3.17}$$

である。

$\ln x$ は第1章で述べた $\tan^{-1}(1/m)$ とほとんど同じようにして計算できる。しかし作製すべきプログラムは $\tan^{-1}(1/m)$ の場合とはかなり異なる。$\tan^{-1}(1/m)$ の場合は式（2.9）において G_k を一倍長の数，mで2回或いは，m^2 で1回割ることで右辺第二項を計算できる。

$\ln x$ の場合に，式（2.10），（2.3）に相当する式は

$$G_{k-1} = \frac{1}{2k-1} + X^2 G_k \qquad (3.18)$$

$$\begin{cases} G_n = 1 \\ G_0 = X g_n \end{cases} \qquad (3.19)$$

$$g_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(2i+1)} X^{2i+1} \qquad (3.20)$$

```
********* NAPIER CONSTANT 'E' ********* NDIG= 2500 ********* LENG=  630 *********
*                                                                                 *
*  2.71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995   (  1)   *
*    95749 66967 62772 40766 30353 54759 45713 82178 52516 64274   (  2)   *
*    27466 39193 20030 59921 81741 35966 29043 57290 03342 95260   (  3)   *
*    59563 07381 32328 62794 34907 63233 82988 07531 95251 01901   (  4)   *
*    15738 34187 93070 21540 89149 93488 41675 09244 76146 06680   (  5)   *
*    82264 80016 84774 11853 74234 54424 37107 53907 77449 92069   (  6)   *
*    55170 27618 38606 26133 13845 83000 75204 49338 26560 29760   (  7)   *
*    67371 13200 70932 87091 27443 74704 72306 96977 20931 01416   (  8)   *
*    92836 81902 55151 08657 46377 21112 52389 78442 50569 53696   (  9)   *
*    77078 54499 69967 94686 44549 05987 93163 68892 30098 79312   ( 10)   *
*                                                                                 *
*    77361 78215 42499 92295 76351 48220 82698 95193 66803 31825   ( 11)   *
*    28869 39849 64651 05820 93923 98294 88793 32036 25094 43117   ( 12)   *
*    30123 81970 68416 14039 70198 37679 32068 32823 76464 80429   ( 13)   *
*    53118 02328 78250 98194 55815 30175 67173 61332 06981 12509   ( 14)   *
*    96181 88159 30416 90351 59888 85193 45807 27386 67385 89422   ( 15)   *
*    87922 84998 92086 80582 57492 79610 48419 84443 63463 24496   ( 16)   *
*    84875 60233 62482 70419 78623 20900 21609 90235 30436 99418   ( 17)   *
*    49146 31409 34317 38143 64054 62531 52096 18369 08887 07016   ( 18)   *
*    76839 64243 78140 59271 45635 49061 30310 72085 10383 75051   ( 19)   *
*    01157 47704 17189 86106 87396 96552 12671 54688 95703 50354   ( 20)   *
*                                                                                 *
*    02123 40784 98193 34321 06817 01210 05627 88023 51930 33224   ( 21)   *
*    74501 58539 04730 41995 77770 93503 66041 69973 29725 08868   ( 22)   *
*    76966 40355 57071 62268 44716 25607 98826 51787 13419 51246   ( 23)   *
*    65201 03059 21236 67719 43252 78675 39855 89448 96970 96409   ( 24)   *
*    75459 18569 56380 23637 01621 12047 74272 28364 89613 42251   ( 25)   *
*    64450 78182 44235 29486 36372 14174 02388 93441 24796 35743   ( 26)   *
*    70263 75529 44483 37998 01612 54922 78509 25778 25620 92622   ( 27)   *
*    64832 62779 33386 56648 16277 25164 01910 59004 91644 99828   ( 28)   *
*    93150 56604 72580 27786 31864 15519 56532 44258 69829 46959   ( 29)   *
*    30801 91529 87211 72556 34754 63964 47910 14590 40905 86298   ( 30)   *
*                                                                                 *
*    49679 12874 06870 50489 58586 71747 98546 67757 57320 56812   ( 31)   *
*    88459 20541 33405 39220 00113 78630 09455 60688 16674 00169   ( 32)   *
*    84205 58040 33637 95376 45203 04024 32256 61352 78369 51177   ( 33)   *
*    88386 38744 39662 53224 98506 54995 88623 42818 99707 73327   ( 34)   *
*    61717 83928 03494 65014 34558 89707 19425 86398 77275 47109   ( 35)   *
*    62953 74152 11151 36835 06275 26023 26484 72870 39207 64310   ( 36)   *
*    05958 41166 12054 52970 30236 47254 92966 69381 15137 32275   ( 37)   *
*    36450 98889 03136 02057 24817 65851 18063 03644 28123 14965   ( 38)   *
*    50704 75102 54465 01172 72115 55194 86685 08003 68532 28183   ( 39)   *
*    15219 60037 35625 27944 95158 28418 82947 87610 85263 98139   ( 40)   *
*                                                                                 *
*    55990 06737 64829 22443 75287 18462 45780 36192 98197 13991   ( 41)   *
*    47564 48826 26039 03381 44182 32625 15097 48279 87779 96437   ( 42)   *
*    30899 70388 86778 22713 83605 77297 88241 25611 90717 66394   ( 43)   *
*    65070 63304 52795 46618 55096 66618 56647 09711 34447 40160   ( 44)   *
*    70462 62156 80717 48187 78443 71436 98821 85596 70959 10259   ( 45)   *
*    68620 02353 71858 87485 69652 20005 03117 34392 07321 13908   ( 46)   *
*    03293 63447 97273 55955 27734 90717 83793 42163 70120 50054   ( 47)   *
*    51326 38354 40001 86323 99149 07054 79778 05669 78533 58048   ( 48)   *
*    96690 62951 19432 47309 95876 55236 81285 90413 83241 16072   ( 49)   *
*    26029 98330 53537 08761 38939 63917 79574 54016 13722 36187   ( 50)   *
*                                                                                 *
***********************************************************************************
Stop - Program terminated.
```

図2　Napierの数，e

$$X=\frac{x-1}{x+1} \tag{3.21}$$

である。従って式（3.18），（3.19）から $\ln x$ を計算するためには，まず式（3.21）で与えられる X を計算しなければならない。X を計算するためには多倍長数の逆数の計算を要する。

多倍長数を分母とする除算は非常に時間がかかる。そのために直接的な除算を避けて，Newton-Raphson 法により多倍長数の逆数を計算する（多倍長数同志の乗算は容易である）。

いま，a を多倍長数として

$$x=1/a \tag{3.22}$$

を計算したいとする。

$$f(x)=1-\frac{1}{ax} \tag{3.23}$$

とおくと，1/a を求めることは方程式，$f(x)=0$を解くことと同じである。式（3.23）から

$$f'(x)=\frac{1}{ax^2} \tag{3.24}$$

が容易に求まる。これを Newton-Raphson 反復式

$$x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_i) \tag{3.25}$$

に代入すると，$f(x)=0$に対する Newton-Raphson 反復式は

$$x_{i+1}=x_i(2-ax_i) \tag{3.26}$$

となる。適当な初期値を与えてこの反復式を x_{i+1} と x_i とが a の有効桁数の半分程度の桁数，一致するまで反復適用すれば，x_{i+1}は1/a の正しい値になる。

π の計算と同じようにプログラムを作って e の値を計算した。図 2 に MULTI 16で計算した2500桁の e の値を示す。所要時間は3.5時間位であった。

4．Bernoulli 数，B_{2n}の計算

次章の Euler の定数，γ の計算のために Bernoulli 数を必要とするので本章でまず，Bernoulli 数の計算について述べる。

Bernoulli 数，B_nは

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} \quad : |t|<2\pi \tag{4.1}$$

で定義される Bernoulli 多項式 $B_n(x)$の $x=0$における値として定義される[8]。これらについて，

$$B_n(x+h)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)h^{n-k} \tag{4.2}$$

$$B_n(0)=(-1)^n B_n(1)=B_n \quad : n\geqq 0 \tag{4.3}$$

$$B_{2n+1}=0 \quad : n\geqq 1,\ B_1=-1/2 \tag{4.4}$$

なる性質がある[8]。

式（4.2）で $h=1$，$x=0$とおき式（4.3），（4.4）を使うと，

$$B_{2n}=\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\left\{n-\sum_{i=1}^{n-1}\binom{2n+2}{2i}B_{2i}\right\} \tag{4.5}$$

を容易に得ることができる，ここで，

$$B_0=1,\quad B_2=1/6 \tag{4.6}$$

であり，一般に B_{2n}は有理数である。

式(4,5)を使って順次，B_{2n}を計算してゆくと次第に桁落ちが大きくなって満足すべき結果を得られない。高精度計算に使用しうるような値を得るには B_{2n}を有理数の形で得るようにしなければならない。

$$b_{2n}=(-1)^{n-1}B_{2n} \quad (>0) \tag{4.7}$$

を計算することにして

$$b_{2n}=I_{2n}+\frac{N_{2n}}{D_{2n}} \tag{4.8}$$

とおく。I_{2n}，N_{2n}，D_{2n}は非負の整数，$N_{2n}<D_{2n}$で，N_{2n}，D_{2n}は互いに素であるとする。これを式(4.5)に代入すると，

$$I_{2n}+\frac{N_{2n}}{D_{2n}}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(2n+1)}\left[n+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{2n+2}{2k}\left(I_{2k}+\frac{N_{2k}}{D_{2k}}\right)\right] \tag{4.9}$$

である。この式を使って I_{2n}，N_{2n}，D_{2n}を順次計算する。

n が大きくなると I_{2n}は極めて大きな数になる。どの程度の大きさになるかは次のようにして見積ることができる。

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{2\cdot(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n) \tag{4.10}$$

である[8]。ここで $\zeta(n)$は Riemann の Zeta 関数で

$$\zeta(n)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^n} \tag{4.11}$$

である。式(4.10)において n が十分に大きいとして $\zeta(2n)\fallingdotseq 1$を使い$(2n)!$に stirling の公式を適用して両辺の常用対数をとると

$$\log|B_{2n}|\fallingdotseq\log 2+\frac{1}{2}\log(4\pi n)+2n\log\frac{n}{\pi e} \tag{4.12}$$

となる。これからたとえば B_{200}の整数部，I_{200}は10進216桁，B_{300}の整数部 I_{300}は376桁程度であることがわかる。

（4.9）を用いて Bernoulli 数を B_{300}まで計算した。その一部を図 3 に示す。

5．Euler 定数，γ の計算

Euler 定数 γ は

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n\right) \tag{5.1}$$

で定義される。この数は50桁程度なら容易に入手できるが[7]それ以上の桁数の数を入手するのは困難である。

$$\gamma=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}+\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=n}^{N}\frac{1}{i}-\ln N\right) \tag{5.2}$$

```
********** BERNOULLI NUMBERS ************ B<2N>=I+N/D ***************  16 **********
*                                                                                  *
*   2N= 278   I=               5480 95712 13188 76639 51209 69944 13992 28432     *
*                 71762 63902 83290 37314 88709 06758 42331 33183 49667 07102     *
*                 74131 55944 62661 11512 78273 16443 61181 89633 20006 28600     *
*                 93252 68763 54659 09520 83208 46309 26711 04424 48620 66554     *
*                 85220 79035 11627 60078 84704 74883 86407 73346 21276 56783     *
*                 69144 66364 82120 88565 29341 02779 63635 78778 33236 03167     *
*                 13111 97594 85040 06486 11742 66610 91031 12529 04127 28713     *
*             N=                                                            1     *
*             D=                                                            6     *
*                                                                                  *
*   2N= 280   I=                 108 45732 84087 68611 05181 25291 18607 96163 20248 *
*                 00997 07850 40606 97036 49224 44724 16469 65545 15963 48650     *
*                 39437 19647 67389 31820 61999 40641 82929 23715 11499 28627     *
*                 49381 64431 85871 25631 62416 54682 91740 71130 46352 08761     *
*                 13655 53794 06228 68388 71389 85681 38369 25854 23819 87703     *
*                 41945 50188 42862 21253 89160 43464 48050 35839 14219 52792     *
*                 21858 55195 76146 92003 48963 23918 90496 69879 54590 49247     *
*             N=                                                15715 73639     *
*             D=                                                78281 73870     *
*                                                                                  *
*   2N= 282   I=                   2 17698 07756 47663 53972 91651 73863 71645 99620 73022 *
*                 26393 84706 01680 61853 40744 57573 39553 38207 22744 31372     *
*                 10802 56794 68609 14855 95703 45781 46630 00754 93495 82517     *
*                 17632 66435 77579 97292 52294 75914 03553 58175 51101 41906     *
*                 15023 76463 72923 22221 52955 15753 66282 99102 01606 76370     *
*                 70500 43025 99944 36182 95763 06430 35182 55242 99230 57640     *
*                 11538 19546 62899 73053 78275 94073 68251 20741 34501 17175     *
*             N=                                                          241     *
*             D=                                                        11886     *
*                                                                                  *
*   2N= 284   I=   4431 99878 61175 53751 94743 94332 56752 60806 82630 69654     *
*                 19180 80462 52900 73129 98340 25552 13299 96728 66236 99940     *
*                 21595 37875 88008 02265 20299 38468 81377 66852 29485 32911     *
*                 23367 57557 11643 63195 74025 85359 64570 24722 01707 77436     *
*                 42499 70393 58784 14239 80325 05243 75226 97312 57972 85603     *
*                 55392 96703 52741 28579 85539 70042 68611 94642 18981 43000     *
*                 04503 46837 24399 01307 48203 50121 66447 21384 82719 21900     *
*             N=                                                            1     *
*             D=                                                           30     *
*                                                                                  *
*   2N= 286   I=                                                           91     *
*                 50625 65771 55350 47417 75627 80737 70096 07299 71727 64807     *
*                 54918 68237 36873 49189 84365 88901 16177 54529 72231 29193     *
*                 05265 63121 63284 41666 84567 07771 40250 08706 65640 76910     *
*                 38293 80163 83244 79277 40111 28609 19130 69896 32420 59739     *
*                 48186 59879 66617 81394 48288 37493 10552 74045 30505 79440     *
*                 76922 28207 18518 15161 57184 64883 12542 12548 72351 78414     *
*                 54680 64232 90628 18282 99269 63483 44696 50856 82373 12184     *
*             N=                                                           17     *
*             D=                                                          138     *
*                                                                                  *
*   2N= 288   I=                                                      1 91586     *
*                 73530 03157 35131 65775 79148 68313 36132 89816 21946 70336     *
*                 25891 56542 19445 01699 35661 60007 44422 87163 64437 03208     *
*                                                                                  *
************************************************************************************

********** BERNOULLI NUMBERS ************ B<2N>=I+N/D ***************  17 **********
*                                                                                  *
*                 77662 89475 22601 63652 23951 10055 01627 88295 01586 85748     *
*                 14904 32395 73843 13841 91327 10843 03141 88040 93235 82138     *
*                 33559 86530 53511 02759 97675 43208 65010 54473 79757 25023     *
*                 95744 74433 86504 39576 93388 94986 19125 50370 48984 73803     *
*                 34395 93323 24896 89366 14133 47806 69892 96583 83775 40505     *
*             N=                                          9 60153 75671     *
*             D=                                         23 10263 34630     *
*                                                                                  *
*   2N= 290   I=                                                   4067 25630     *
*                 35422 12258 69883 60036 82016 04062 88243 11299 43788 92537     *
*                 75181 84351 67988 02072 81550 20423 37729 78030 84684 64810     *
```

```
*                   54873 29512 60373 85886 53615 13513 76171 00343 59418 09093   *
*                   64785 94917 75941 31739 07424 66151 89089 73483 55145 93074   *
*                   14093 15295 28938 27307 06889 79490 64471 09432 01762 60682   *
*                   85049 21272 30154 29808 68403 12717 79328 86534 17274 49025   *
*                   20846 52507 88467 39935 93395 42195 55217 13581 13463 94379   *
*              N=                                                           229   *
*              D=                                                          3894   *
*                                                                                 *
*    2N= 292   I=                                                87 54223 79103   *
*                   77366 16228 15020 99103 48734 62919 63013 88633 60046 97805   *
*                   89125 23267 17522 16806 72058 89393 68180 62021 11555 77356   *
*                   30968 89615 35672 87971 51767 87940 63510 32724 25771 34458   *
*                   56915 50218 40881 44142 60957 61295 08982 76387 64202 81798   *
*                   92910 23153 50487 06226 90888 44480 75400 34159 29368 00329   *
*                   76241 54623 82809 59041 75047 21487 96352 74655 01680 37214   *
*                   68685 85843 90112 17767 94911 11106 31341 64809 93835 00663   *
*              N=                                                           323   *
*              D=                                                          8790   *
*                                                                                 *
*    2N= 294   I=                                           1 91017 36887 35533   *
*                   66724 43737 47124 10937 98257 22144 41853 13982 41339 51118   *
*                   57099 42164 16257 44732 60437 33223 86679 54527 27573 21970   *
*                   93677 38052 79272 60606 57920 59512 33897 07330 73280 78689   *
*                   09987 81498 65205 84469 81442 42220 45650 16754 57460 56886   *
*                   19720 94621 14653 91022 37011 49159 74473 65254 28394 04438   *
*                   02981 45381 12001 71014 58504 35218 53180 40729 21089 64353   *
*                   00713 61364 97732 02719 99246 25554 65179 85644 14397 83891   *
*              N=                                                             1   *
*              D=                                                          1806   *
*                                                                                 *
*    2N= 296   I=                                        4225 00132 02650 91714   *
*                   63111 50647 13174 40460 72716 99118 18136 26589 02062 44236   *
*                   60078 10054 23294 89492 28112 65361 33384 56763 09405 83729   *
*                   36425 54353 41659 46719 47700 54068 61611 53267 66818 77169   *
*                   24731 79495 96930 43910 89266 84670 25654 99749 63055 37507   *
*                   42661 40794 25364 56097 46153 08205 88513 15167 15968 11617   *
*                   69166 26081 59836 94681 10377 42116 94962 95040 31326 30264   *
*                   70008 07565 87797 34227 98769 39158 47576 20999 99218 63011   *
*              N=                                                           179   *
*              D=                                                          4470   *
*                                                                                 *
*    2N= 298   I=                                     94 71959 35254 78276 78466   *
*                   77079 67875 03034 50541 80042 01606 01889 95666 93880 14024   *
*                                                                                 *
***********************************************************************************
********** BERNOULLI NUMBERS ************ B<2N>=I+N/D *************** 18 **********
*                                                                                 *
*                   18098 30292 08602 72655 71947 65976 35143 73612 93688 61328   *
*                   02361 62982 58933 75006 26834 59981 88628 79964 87851 19801   *
*                   00107 31421 71512 78428 71472 81360 64239 86978 46322 87592   *
*                   52104 48961 81774 24733 55306 74377 56488 82865 74920 61053   *
*                   69215 15460 81578 39689 69196 31633 00447 90835 31556 19831   *
*                   76896 49009 34669 17864 94411 85945 20299 49795 00253 58973   *
*              N=                                                             1   *
*              D=                                                             6   *
*                                                                                 *
*    2N= 300   I=                                   2 15214 99732 79986 82971 98173   *
*                   76756 08819 85734 56572 78380 67018 49343 92584 67969 95824   *
*                   34347 47665 57085 97682 85311 82417 57779 98234 96712 69513   *
*                   72030 30653 26137 11572 15069 98588 46633 72469 31378 11577   *
*                   32522 65902 43532 62781 78358 19047 27309 74598 06434 60527   *
*                   82946 34103 04026 33064 22135 20422 46285 25102 01379 33190   *
*                   04047 34943 97226 30091 06233 89045 73288 75738 43929 38574   *
*                   08433 87852 52161 19873 11118 42810 03755 06182 67765 49045   *
*              N=                                                35 43874 39891   *
*              D=                                                86 60544 19230   *
*                                                                                 *
***********************************************************************************
Stop - Program terminated.
```

図3　Bernoulli数，B_{2n}（一部）

において

$$s=\sum_{i=n}^{N}\frac{1}{i} \tag{5,3}$$

に Euler-Maclaurin 和の公式[8]を適用すると

$$s=\ln N-\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2N}+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{2k}\left(\frac{1}{n^{2k}}-\frac{1}{N^{2k}}\right)+\bar{E}_m(n, N) \tag{5.4}$$

となる。これを式（5.2）に代入すると，

$$\gamma=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{1}{2n}-\ln n+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{2k}\cdot\frac{1}{n^{2k}}+\tilde{E}_m(n) \tag{5.5}$$

となる。ここで剰余項 $\tilde{E}_m(n)$ は採用した最後の項の絶対値を越えない。すなわち

$$|\tilde{E}_m(n)|\leqq\frac{|B_{2k}|}{2k}\cdot\frac{1}{n^{2k}} \tag{5.6}$$

である。また，Bernoulli 数と Riemann の Zeta 関数との間の関係，式（4.10）を使う式（5.5）は

$$\gamma=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{1}{2n}-\ln n+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{2k}\cdot\frac{1}{n^{2k}}+\sum_{k=m+1}^{M}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}\cdot\frac{2\cdot(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\cdot\zeta(2k)\cdot\frac{1}{n^{2k}}+\tilde{E}_M(n) \tag{5.7}$$

と書き改めることができる。ここで，

$$|\tilde{E}_M(n)|\leqq\frac{1}{M}\cdot\frac{(2M)!}{(2\pi n)^{2M}}\cdot\zeta(2M)=E_M(n) \tag{5.8}$$

である。まずこの項の性質について述べる。

M は十分に大きいとして $\zeta(2M)\fallingdotseq 1$ を使い $(2M)!$ に Stirling の公式を適用すると式（5.8）の右辺 $E_M(n)$ は

$$E_M(n)\fallingdotseq\sqrt{\frac{4\pi}{M}}\cdot\left(\frac{M}{\pi e n}\right)^{2M} \tag{5.9}$$

となる。$E_M(n)$ はMを固定して n を大きくすればいくらでも小さくなるが，n を固定してMを大きくしたとき最初は減少するがある値を超えると増大し発散する。その境界は，式（5,8）から

$$\frac{(2M-1)!}{(2\pi n)^{2M}}\fallingdotseq\frac{(2M+1)!}{(2\pi n)^{2M+2}} \tag{5.10}$$

をみたすM，すなわち $M\fallingdotseq\pi n$ である。これから n を固定したとき $E_M(n)$ の到達しうる最小値，$\min_M E_M(n)$ は

$$\min_M E_M(n)\fallingdotseq\sqrt{\frac{4}{n}}\left(\frac{1}{e}\right)^{2\pi n} \tag{5.11}$$

程度であることがわかる。

Euler 定数 γ の計算は Napier の数 e，Ludolph の数 π の計算に比較して非常に難かしい。e や π は所要の桁数を与えて必要な項数をきめることができるが γ の計算ではそのようにすることは難しい。

式（5.7）を使って γ を計算するためには，n，m，M の3つのパラメータをきめなければならない。このうち m は使用しうる Bernoulli 数の個数によってきまる。第4章で述べたように Bernoulli 数はその絶対値が急速に大きくなる数である。また，あらかじめ計算して表の形にしておかなければならないので，主記憶の制約からあまり多くを使うことができない。

次に式（5.7）で第三項の ln n を計算しなければならないが，n を $n=2^p$（p は自然数）の形にきめてしまうと $\ln n=p\ln 2$ であるから ln2をあらかじめ計算しておくだけでよい。第五項にあらわれる π もあらかじめ計算しておく。

式（5.7）右辺第五項の $\zeta(2k)$ は 2k が十分に大きければ1とみなすことができる。$\zeta(2k)=1$ としたときの誤差は 2k が十分に大きければ $1/2^{2k}$ 程度と考えてよい。

さて，式（5.7）において $n(=2^p)$ 及び m が与えられたとする。このとき γ を何桁，計算しうるかを考える。まず第四項までで，

$$d_1=-\log\left\{\sqrt{\frac{4\pi}{m}}\left(\frac{m}{\pi e n}\right)^{2m}\right\} \tag{5.12}$$

桁程度の r を計算できる。更に第五項における $\zeta(2k)$ は $2k\geqq 2(m+1)$ においては，

$$d_2=-\log 2^{-2(m+1)} \tag{5.13}$$

程度の桁数で1とみなしうる（1．のうしろに d_2 個程度の0が続く）ので結局，式（5.7）を使って γ を $d=d_1+d_2$ 桁程度計算しうることがわかる（第五項の $\zeta(2k)$ を1とおく）。このときMは

$$-\log\left\{\sqrt{\frac{4\pi}{M}}\left(\frac{M}{\pi e n}\right)^{2M}\right\}=d \tag{5.14}$$

を満足するようにきめる。すなわち Newton-Raphson 法を使って方程式を解き，得られた結果の整数部をMとする。ただし，この方程式は常に解けるとは限らない。解けないときは，d，Mをそれぞれ

$$\begin{cases} d=-\log\left\{\sqrt{\frac{4}{n}}\left(\frac{1}{e}\right)^{2\pi n}\right\} \\ M=\pi n \end{cases} \tag{5.15}$$

とする。

以上の方法でプログラムを作製し，m=150，n=1024（$p=\log_2 1024=10$）として γ を計算した。その結果を図4に示す。この結果は，π や e と異なり正しいかどうかを検証する手段がない。しかしパラメータを種々変えて計算した結果と比較してこの結果は正しいと信じている。

```
***** EULER CONSTANT 'GAMMA' ** NDIG=  600 ** LENG= 160 ** IP=10 ** ML=150 *****
*                                                                              *
*     0.57721 56649 01532 86060 65120 90082 40243 10421 59335 93992  (   1)    *
*       35988 05767 23488 48677 26777 66467 09369 47063 29174 67495  (   2)    *
*       14631 44724 98070 82480 96050 40144 86542 83622 41739 97644  (   3)    *
*       92353 62535 00333 74293 73377 37673 94279 25952 58247 09491  (   4)    *
*       60087 35203 94816 56708 53233 15177 66115 28621 19950 15079  (   5)    *
*       84793 74508 57057 40029 92135 47861 46694 02960 43254 21519  (   6)    *
*       05877 55352 67331 39925 40129 67420 51375 41395 49111 68510  (   7)    *
*       28079 84234 87758 72050 38431 09399 73613 72553 06088 93312  (   8)    *
*       67600 17247 95378 36759 27135 15772 26102 73492 91394 07984  (   9)    *
*       30103 41777 17780 88154 95706 61075 01016 19166 33401 52278  (  10)    *
*                                                                              *
*       93586 79654 97252 03621 28792 26555 95366 96281 76388 79272  (  11)    *
*       68013 24310 10476 50596 37039 47394 95763 89065 72967 92960  (  12)    *
*                                                                              *
********************************************************************************
Stop - Program terminated.
```

図4　Euler定数，γ

6．むすび

はじめに述べたようにこの計算を始めた動機は，導入したパソコンの信頼性をみるためであった。π と e の計算でその目的は達成されたと思う。信頼性は十分である。

本稿で述べた定数の他，$\ln n$，$\log n$，$\log_2 n$，$\sqrt{a}$，$\sqrt[n]{a}$（n，a は自然数），Euler 数 E_{2n} などを高精度で計算するプログラムを作っている。最初はパソコンの信頼性をみる積りで始めたことであるが今後，これまでに作製したプログラムを活かして，又改良して数学定数のデータベースを作製しようと計画している。しかし，この目的のために，より多くの桁数の数学定数を計算するには MULTI 16の FORTRAN の速さは少し遅すぎる。幸いにも MULTI 16の FORTRAN コンパイラが近い将来バージョンアップされて速さは現在の10倍程度になると期待される。今後新しいコンパイラを使って，又一部をアセンブラでコーディングして多くの数学定数を計算する予定である。

参考文献

1）浦昭二，近藤頌子訳，J. Nievergelt 他原著：数学問題へのコンピュータアプローチ，205，培風館，東京，1976.

2）Shanks, D. and J. W. Wrench : Calculation of π to 100,000 Decimals, Math. Comp., 77, 76-99, 1962.

3）二宮市三：π の計算，情報処理学会第25回（昭和57年後期）全国大会予稿集，1 L 8

4）金田康正：ナノピコ教室，bit，Vol.14，No.10，102-109，1982.

5）高木貞治：解析概論，259，岩波書店，東京，1981.

6）Ralston, A. and Robinowitz, P. : A First Course in Numerical Analysis, 344-347, McGraw-Hill, New York, 1978.

7）日本数学会：岩波数学辞典第2版，968，岩波書店，東京，1982.

8）Abramowitz, M. and Stegun, I. (ed.) : Handbook of Mathematical Functions, 10th ed., 804-810, Dover Publication Inc., New York, 1972.

（受理　昭和58年1月16日）