

# 半無限弾性地盤上の二つの基礎の地震応答

## その1. 問題の定式化

中村 満喜男

# Seismic Response of Two Foundations on an Elastic Half Space

## Part 1. Formulation of the Problem

Makio NAKAMURA

In this paper, the dynamic interaction between two foundations on an elastic half space subjected to propagating seismic waves is investigated analytically. The first Fredholm's integral equation is obtained using the Green's function (the solution to be obtained by Lamb) and solved using the Galerkin's approximation method. That is, the stress distributions under two foundations are expanded by the Chebyshev polynomial's series, the matrix equations composed those unknown coefficients are deduced and solved instead of the integral equation.

### 1. まえがき

現在に至るまで、地盤上に存在する構造物が地震動によってどのような影響を受けるのかと言う問題について、数多くの研究がなされて来ている。特に地盤と構造物の相互作用を考へて、地震動に対する応答特性を把握しようとする試みがここ数十年の間勢力的に行われて来た。その初期はいわゆる Dynamical Ground Compliance<sup>1)</sup> 或いは振動アドミッタンス<sup>2)</sup>の各表現によってその影響を表わしている。これらはいずれも半無限弾性地盤上にある基礎を力によって定常加振した時の応答特性であり、その応答特性はいずれも地表面の境界条件を応力で統一して表示し、波動方程式を解くという方法で求められている。従って地表面のうち、基礎下においてはその応力分布の型(放物線分布・等分布・剛体底面分布)を仮定し応力度分布を求め、自由地表では応力度が零であるとして応力境界条件を表わしている。この様にして得られた相互作用の効果をj利用して有益な多くのパラメーターに富んだ研究がなされた。例えば二つの基礎が半無限弾性地盤を介して相互に及ぼす影響も、加振基礎の定常加振に対する受振基礎中心の変位で受振基礎全体の変位を表わす<sup>3)</sup>といった極めて工学的なとらえ方がなされている。しかし一方で基礎下における応力分布の型を仮定すると言う枠をはずす努力<sup>4),5),6)</sup>がなされて来た。すなわちより正確さを求めるならば、基礎下の変位が境界条件

として与えられるべきであり、波動方程式を混合境界条件(基礎下……変位,自由地表……応力度が零)のもとに解くことが研究された。適切なグリーン関数が求められ、それをもとに連立の積分方程式を導き、それらを最終的には数値計算によって解いている。<sup>7),8),9),10)</sup>

本論文は半無限弾性地盤上に存在する二つの基礎が地震のような伝播する波動を受けた時の挙動を、波動方程式の混合境界値問題として、解析したものである。問題はすべて2次元問題として扱われ、基礎はZ方向に無限に長いものとして扱っている。現象の把握を容易にする意味で基礎—地盤系へ入射する波動は上下動のみを考へている。又入射波はx方向に進行する波動であるとしている。水平動或いは上下動と水平動とのカップリング等については別の機会に明らかにしたいと思っている。ここで採用される解析法はFredholmの第1種積分方程式をGalerkin法の近似解法を使って解いている。<sup>11),12)</sup>すなわち二つの基礎下の応力度分布をChebyshevの多項式<sup>13)</sup>で展開し、積分方程式をそれらの係数を未知量とするマトリックス方程式に変換して解析を行っている。ここで採用された方法は3次元の問題にも若干複雑にはなるが、精度の良いグリーン関数(3次元)さえ得られれば容易に拡張できるものと考えられる。

2. 問題の定式化

問題を2次元として扱い、基礎-地盤系を図1の様に考える。座標の原点Oは基礎A・Bにはさまれた自由地表の中央点にとる。基礎A・Bは共に剛体であるとする。基礎A・Bの基礎半幅を  $b$ 、基礎A・Bにはさまれる自由地表の長さを  $2a$  とする。基礎の厚さを  $h$  とする。地盤は半無限弾性体とし、地震による入射波が  $x$  軸の+の方向に伝播するものとする。従って基礎A・Bは入射波の波長によってさまざまな動きをするようになる。以下

$c_1$  : 自由地表における見かけ上の伝播速度

$\omega$  : 入射波の円振動数

$Y_1$  : 入射波の振幅

図1で入射波は左側から入射する様に示されているが、伝播速度  $c_1$  を適当に決めることによって、左下方から入射する場合も容易に扱うことができる。又入射波が  $\omega$  に関する定常波動であるから、応答系も当然定常振動することは明らかである。従って以下の式の展開では  $\exp(i\omega t)$  は省略することにする。式(3)で表わされる入射波

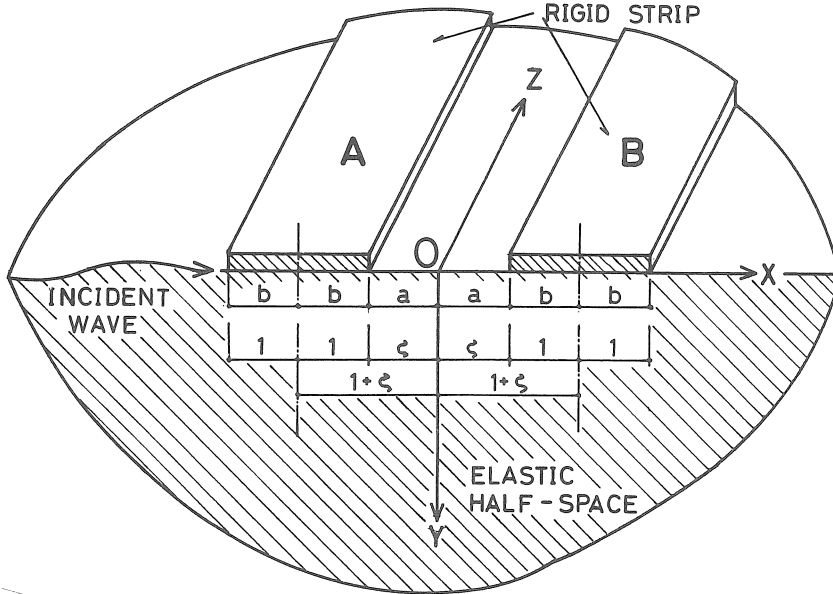


Fig. 1. Rigid Strip on an Elastic Half Space.

の解析では無次元量で扱うのが便利である為、基礎半幅  $b$  を基準にして次の基礎間距離を示す無次元量を導入する。

$$\xi = \frac{a}{b} \tag{1}$$

座標に関しても同様に考えて無次元座標  $x$  を導入する。

$$x = \frac{X}{b} \tag{2}$$

これらの量が図1に合せて示されている。

入射波は  $x$  方向に  $c_1$  の速度で伝播する、時間に関して定常な波動を考える。ここでは上下動のみを考えることにするから次式によってその波動を表わすことができる。

$$u^1 \cdot e^{i\omega t} = (Y_1 \cdot e_v) \cdot e^{i(\omega t - K_1 X)} \tag{3}$$

ここに

$$K_1 = \omega / c_1 \text{ 波数}$$

に対し、基礎A・Bの変位を対称変位モードと逆対称変位モードの線形和として式(4)の様に表示することができる。

$$V(X) = v^{\textcircled{1}}(X) \cdot \bar{A}_1 + v^{\textcircled{2}}(X) \cdot \bar{A}_2 \tag{4}$$

ここに

$\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$  : 次元を有する未知係数

$V(X)$  : 基礎A・Bの変位分布

$v^{\textcircled{1}}(X) \cdot v^{\textcircled{2}}(X)$  : 図2に示される変位モード(無次元)

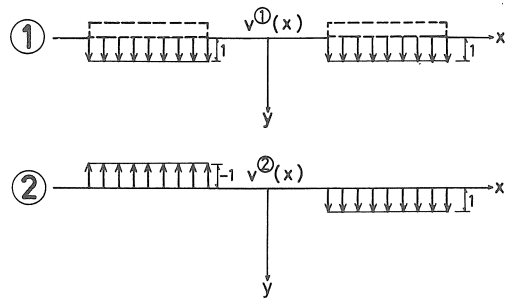


Fig. 2. Displacement Field for the Boundary Condition ① and ②.

基礎A・Bの振動方程式は、A基礎鉛直変位が $(\bar{A}_1 - \bar{A}_2)$  B基礎鉛直変位が $(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)$ であるから

$$\begin{cases} -\bar{M} \cdot \omega^2 \cdot (\bar{A}_1 - \bar{A}_2) = \bar{Q}_A^S \\ -\bar{M} \cdot \omega^2 \cdot (\bar{A}_1 + \bar{A}_2) = \bar{Q}_B^S \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{但し } \begin{cases} \bar{Q}_A^S = \bar{Q}_A^R + \bar{Q}_B^R \\ \bar{Q}_B^S = \bar{Q}_B^R + \bar{Q}_A^R \end{cases} \quad (6)$$

式(5)の振動方程式は $z$ 方向の幅 $b$ で計算するものであり、基礎A・Bの質量 $\bar{M}$ は簡単のため共に同じとし、記号 $\bar{\quad}$ のついた量は次元を有する量であることを示している。式(5)・(6)における記号は次の量を示している。

$\bar{Q}_A^S \cdot \bar{Q}_B^S$  : Scattered Wave による基礎A・Bの底面からの鉛直応力度の合力である。

$\bar{Q}_A^R \cdot \bar{Q}_B^R$  : 入射波動がない時、基礎A・Bの変位が $V(X)$ であることによって基礎A・Bの底面から受ける鉛直応力度の合力である。

$\bar{Q}_A^P \cdot \bar{Q}_B^P$  : 基礎A・Bが入射波に対して固定されている時、基礎A・Bの底面に生ずる鉛直応力度の合力である。

$\bar{Q}_A^R \cdot \bar{Q}_B^S \cdot \bar{Q}_A^P \cdot \bar{Q}_B^P$  は基礎底面に関する面積積分によってのように表わされる。

$$\begin{cases} \bar{Q}_A^R = b \cdot \sum_{n=1}^2 \int_{-(a+2b)}^{-a} \Phi_n(X) dX \\ \bar{Q}_B^S = b \cdot \sum_{n=1}^2 \int_a^{(a+2b)} \Phi_n(X) dX \\ \bar{Q}_A^P = b \cdot \sum_{n=3}^4 \int_{-(a+2b)}^{-a} \Phi_n(X) dX \\ \bar{Q}_B^P = b \cdot \sum_{n=3}^4 \int_a^{(a+2b)} \Phi_n(X) dX \end{cases} \quad (7)$$

ここに $\Phi_1(X) \cdot \Phi_2(X)$ は図2における① $\times \bar{A}_1$ と② $\times \bar{A}_2$ の状態に対応する基礎底面の応力度分布である。次に入射波が $\mathbf{u}_1 = Y_1 \cdot \mathbf{e}_y \cdot \exp(-i \cdot K_1 X)$ であるから

$$-\mathbf{u}_1 = (-Y_1 \cdot \cos K_1 X + i \cdot Y_1 \cdot \sin K_1 X) \cdot \mathbf{e}_y \quad (8)$$

であり、基礎A・Bの変位が $-Y_1 \cdot \cos K_1 X$ となる状態を③、 $i \cdot Y_1 \cdot \sin K_1 X$ となる状態を④とし、それぞれの状態に対応する基礎底面の鉛直応力分布が $\Phi_3(X) \cdot \Phi_4(X)$ である。式(5)・(6)・(7)は最後の結果の整理もしくは計算の便利のために次の無次元化を行う。

a) 無次元基礎質量:  $M$

$$\bar{M} = h \cdot 2b \cdot b \cdot \rho_{\text{base}} \quad \bar{M}_{\text{soil}} = h \cdot 2b \cdot b \cdot \rho_{\text{soil}}$$

$$M = \frac{\bar{M}}{\bar{M}_{\text{soil}}} = \frac{\rho_{\text{base}}}{\rho_{\text{soil}}} \quad (9)$$

$$\bar{M} = M \cdot (2h \cdot b^2 \cdot \rho_{\text{soil}}) \quad (9 \cdot 1)$$

b) 無次元振動数:  $\Omega$

$$\Omega = \left( \frac{\omega}{c_2} \right) \cdot b \quad (10)$$

$$\omega = \left( \frac{c_2}{b} \right) \cdot \Omega \quad (10 \cdot 1)$$

但し  $c_2$ : 地盤のせん断波速度

c) 無次元振幅:  $A_1 \cdot A_2$

$$A_1 = \frac{\bar{A}_1}{b} \quad A_2 = \frac{\bar{A}_2}{b} \quad (11)$$

$$\bar{A}_1 = b \cdot A_1 \quad \bar{A}_2 = b \cdot A_2 \quad (11 \cdot 1)$$

d) 無次元化された鉛直応力度分布の合力:  $Q_A^R \cdot Q_B^S \cdot Q_A^P \cdot Q_B^P$

$$\bar{Q}_A^R = b^2 \cdot \mu \cdot Q_A^R \quad \bar{Q}_B^S = b^2 \cdot \mu \cdot Q_B^S \quad (12 \cdot 1)$$

$$\begin{cases} Q_A^R = \sum_{n=1}^2 A_n \cdot \int_{-(\xi+2)}^{-\xi} \sigma_n(x) dx \\ Q_B^S = \sum_{n=1}^2 A_n \cdot \int_{\xi}^{(\xi+2)} \sigma_n(x) dx \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{但し } \sigma_n(x) = \frac{\Phi_n(x)}{(A_n \cdot \mu)} \quad n=1, 2 \quad (12 \cdot 2)$$

$\mu$ は地盤のせん断弾性係数であり、 $\sigma_n(x)$ は無次元化された応力度である。次に式(8)より

$$\begin{cases} \bar{A}_3 = -Y_1 & \bar{A}_4 = i \cdot Y_1 \\ A_3 = \frac{\bar{A}_3}{b} & A_4 = \frac{\bar{A}_4}{b} \end{cases} \quad (13)$$

とすると

$$\bar{Q}_A^R = b^2 \cdot \mu \cdot Q_A^R \quad \bar{Q}_B^S = b^2 \cdot \mu \cdot Q_B^S \quad (14 \cdot 1)$$

$$\begin{cases} Q_A^P = \sum_{n=3}^4 A_n \cdot \int_{-(\xi+2)}^{-\xi} \sigma_n(x) dx \\ Q_B^P = \sum_{n=3}^4 A_n \cdot \int_{\xi}^{(\xi+2)} \sigma_n(x) dx \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{但し } \sigma_n(x) = \frac{\Phi_n(x)}{(A_n \cdot \mu)} \quad n=3, 4 \quad (14 \cdot 2)$$

式(6)・(12.1)・(14.1)より

$$\bar{Q}_A^S = b^2 \cdot \mu \cdot Q_A^S \quad \bar{Q}_B^S = b^2 \cdot \mu \cdot Q_B^S \quad (15 \cdot 1)$$

$$Q_A^S = Q_A^R + Q_B^R \quad Q_B^S = Q_B^R + Q_A^R \quad (15)$$

以上の式(9)~(15)の無次元化の関係を式(5)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{cases} -M \cdot \Omega^2 \cdot (A_1 - A_2) = \nu \cdot Q_A^S \\ -M \cdot \Omega^2 \cdot (A_1 + A_2) = \nu \cdot Q_B^S \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{但し } \nu = \frac{b}{2 \cdot h} \quad (\text{基礎の形状係数})$$

上式は無次元化された振動方程式であり、若干の整理を行うと無次元振幅 $A_1 \cdot A_2$ は次の様に得られる。

$$A_1 = \frac{A_1}{A_1} \quad A_2 = \frac{A_2}{A_2} \quad (17)$$

$$A = \begin{vmatrix} -\left[ \frac{M}{\nu} \cdot \Omega^2 + \int_{-(\xi+2)}^{-\xi} \sigma_1(x) dx \right] & \left[ \frac{M}{\nu} \cdot \Omega^2 - \int_{-(\xi+2)}^{-\xi} \sigma_2(x) dx \right] \\ -\left[ \frac{M}{\nu} \cdot \Omega^2 + \int_{\xi}^{(\xi+2)} \sigma_1(x) dx \right] & -\left[ \frac{M}{\nu} \cdot \Omega^2 + \int_{\xi}^{(\xi+2)} \sigma_2(x) dx \right] \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \begin{cases} Q_A^R & \left[ \frac{M}{\nu} \cdot \Omega^2 - \int_{-(\zeta+2)}^{-\zeta} \sigma_2(x) dx \right] \\ Q_B^R & - \left[ \frac{M}{\nu} \cdot \Omega^2 + \int_{\zeta}^{(\zeta+2)} \sigma_2(x) dx \right] \end{cases} \\
 \Delta_2 &= \begin{cases} - \left[ \frac{M}{\nu} \cdot \Omega^2 + \int_{-(\zeta+2)}^{-\zeta} \sigma_1(x) dx \right] & Q_A^R \\ - \left[ \frac{M}{\nu} \cdot \Omega^2 + \int_{\zeta}^{(\zeta+2)} \sigma_1(x) dx \right] & Q_B^R \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{17.1}$$

上式において  $\sigma_n(x)$   $n = 1 \sim 4$  がわかれば、 $\{-(\zeta+2) \sim -\zeta\}$  と  $\{\zeta \sim (\zeta+2)\}$  の間で数値積分を行い、解を得ることが出来る。 $\sigma_n(x)$  は次に示されるような混合境界条件のもとで波動方程式を解くことによって得られる。

①～④の変位境界

$$\begin{cases}
 \text{①} : v^1(x) = 1 & -(\zeta+2) \leq x \leq -\zeta \quad \zeta \leq x \leq (\zeta+2) \\
 \text{②} : v^2(x) = \begin{cases} -1 & -(\zeta+2) \leq x \leq -\zeta \\ 1 & \zeta \leq x \leq (\zeta+2) \end{cases} \\
 \text{③} : v^3(x) = \cos K_1 \cdot b \cdot x & -(\zeta+2) \leq x \leq -\zeta \\
 & \zeta \leq x \leq (\zeta+2) \\
 \text{④} : v^4(x) = \sin K_1 \cdot b \cdot x & -(\zeta+2) \leq x \leq -\zeta \\
 & \zeta \leq x \leq (\zeta+2)
 \end{cases}
 \tag{18}$$

①～④に共通な応力境界条件 (自由地表の条件)

$$\begin{cases}
 \sigma_n(x) = 0 & |x| < \zeta \quad |\zeta| > \zeta + 2 \\
 \tau_n(x) = 0 & \text{すべての } x \text{ に対し}
 \end{cases}
 \tag{19}$$

3. 積分方程式の解法

①～④の混合境界値問題はグリーン関数の方法を使って未知応力度  $\sigma_n(x)$  を含む積分方程式となる。Lamb は  $x = 0, y = 0$  に生ずる Q の大きさの鉛直 line 荷重による任意の地表面における鉛直変位を次のように表わしている。<sup>14), 15)</sup>

$$V_Q(X) = \frac{Q}{2\pi \cdot \mu} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\beta^2 \cdot \alpha}{F(K)} \cdot e^{iKX} dK
 \tag{21}$$

Q = 1 のとき

$$V_1(X) = \frac{1}{2\pi \cdot \mu} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\beta^2 \cdot \alpha}{F(K)} \cdot e^{iKX} dK
 \tag{21}$$

ここに

$$\begin{cases}
 F(K) = (2K^2 - K_\beta^2)^2 - 4K^2 \cdot \alpha \cdot \beta & : \text{Rayleigh 関数} \\
 \alpha^2 = K^2 - K_\alpha^2 & K_\alpha^2 = \omega^2 / c_1^2 \\
 \beta^2 = K^2 - K_\beta^2 & K_\beta^2 = \omega^2 / c_2^2 \\
 c_1^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} & : \text{圧縮波速度} \\
 c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} & : \text{せん断波速度} \\
 K : \text{波数} & K_\alpha \cdot K_\beta : \text{分岐点} \\
 K_R : F(K) = 0 \text{ の根で Rayleigh Point}
 \end{cases}
 \tag{21.1}$$

式(21)をグリーン関数として使うと、①～④の混合境界値問題は次の方程式を満す。

$$\begin{aligned}
 & \int_{-(a+2b)}^{-a} \Phi_n(\varepsilon) \cdot V_1(X - \varepsilon) d\varepsilon + \\
 & \quad + \int_a^{(a+2b)} \Phi_n(\varepsilon) \cdot V_1(X - \varepsilon) d\varepsilon = V^n(X)
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

但し  $n = 1 \sim 4 \quad -(a+2b) \leq X \leq -a$   
 $a \leq X \leq (a+2b)$

上式は  $\varepsilon = b \cdot \xi$  と次式を使って無次元化する。

$$v_Q(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\beta^2 \cdot \alpha}{F(K)} \cdot e^{iKbx} dK
 \tag{23}$$

式(22)は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \int_{-(\zeta+2)}^{-\zeta} \sigma_n(\xi) \cdot v_Q(x - \xi) d\xi + \int_{\zeta}^{(\zeta+2)} \sigma_n(\xi) \cdot v_Q(x - \xi) d\xi \\
 & \quad = v^n(x)
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

但し  $n = 1 \sim 4 \quad -(\zeta+2) \leq x \leq -\zeta \quad \zeta \leq x \leq (\zeta+2)$

上式中の  $v^n(x)$  は式(18) によって示されている。又上式は未知応力  $\sigma_n(x)$  に関する Fredholm の第1種積分方程式である。式(24)を直接に解いて  $\sigma_n(x)$  を求めることは不可能であるから、 $\sigma_n(x)$  を次の様に展開する。

$$\sigma_n(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^1 A C_l^n \cdot \{1 - (x + \zeta + 1)\}^{\frac{1}{2}} \cdot T_l(x + \zeta + 1) \cdot \\ \quad -(\zeta + 2) \leq x \leq -\zeta \\ \sum_{l=0}^1 B C_l^n \cdot \{1 - (x - \zeta - 1)\}^{\frac{1}{2}} \cdot T_l(x - \zeta - 1) \\ \quad \zeta \leq x \leq (\zeta + 2) \end{cases}
 \tag{25}$$

但し  $n = 1 \sim 4$

ここに  $T_l(x)$  は Chebyshev の多項式であり次式である。<sup>13)</sup>

$$\begin{aligned}
 T_l(x) = \cos(l \cdot \arccos x) &= \frac{1}{2} \cdot \{(x + i\sqrt{1-x^2})^n + \\
 & \quad + (x - i\sqrt{1-x^2})^n\}
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

式(23)・(25)を式(24)に代入し整理すると

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=0}^1 A C_l^n \cdot \frac{(-i)^l}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\beta^2 \cdot \alpha}{F(K)} \cdot J_l(bK) \cdot e^{i b K (x + \zeta + 1)} dK \\
 & \quad + \sum_{l=0}^1 B C_l^n \cdot \frac{(-i)^l}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\beta^2 \cdot \alpha}{F(K)} \cdot J_l(bK) \cdot e^{i b K (x - \zeta - 1)} dK \\
 & \quad = v^n(x)
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

ここに  $J_l(bK)$  : 第1種  $l$  次 Bessel 関数

上式は次の関係を使って求められた

$$\int_{-1}^1 (1 - \theta^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_l(\theta) \cdot e^{\pm i b K \theta} d\theta = (-i)^l \cdot \pi \cdot J_l(\mp bK)
 \tag{28}$$

式(27)の両辺に  $\{1 - (x + \zeta + 1)\}^{-\frac{1}{2}} \cdot T_m(x + \zeta + 1)$  を掛け

て  $-(\zeta+2) \leq x \leq -\zeta$  の範囲で積分を行うと

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^L {}_A C_l^n \cdot (-i)^{l+m} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\beta^2 \cdot \alpha}{F(K)} \cdot J_m(-bK) dK + \sum_{l=0}^L {}_B C_l^n \cdot \\ & (-i)^{l+m} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\beta^2 \cdot \alpha}{F(K)} \cdot J_l(bK) \cdot J_m(-bK) \cdot e^{-ibK(2\zeta+2)} dK \\ & = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 (1-\theta^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_m(\theta) \cdot v^n(\theta-\zeta-1) d\theta \quad (29) \end{aligned}$$

式(27)の両辺に  $\{1-(x-\zeta-1)^2\}^{-\frac{1}{2}} \cdot T_m(x-\zeta-1)$  を掛けて  $\zeta \leq x \leq (\zeta+2)$  の範囲で積分を行うと

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^L {}_A C_l^n \cdot (-i)^{l+m} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\beta^2 \cdot \alpha}{F(K)} \cdot J_l(bK) \cdot J_m(-bK) \\ & \cdot e^{ibK(2\zeta+2)} dK \\ & + \sum_{l=0}^L {}_B C_l^n \cdot (-i)^{l+m} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\beta^2 \cdot \alpha}{F(K)} \cdot J_l(bK) \cdot J_m(-bK) dK \\ & = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 (1-\theta^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_m(\theta) \cdot v^n(\theta+\zeta+1) d\theta \quad (30) \end{aligned}$$

式(29)・(30)において次のパラメータを導入する。

$$\begin{cases} a_{ml} = (-i)^{l+m} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\beta^2 \cdot \alpha}{F(K)} \cdot J_l(bK) \cdot J_m(-bK) dK \\ b_{ml} = (-i)^{l+m} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\beta^2 \cdot \alpha}{F(K)} \cdot J_l(bK) \cdot J_m(-bK) \\ \quad \cdot e^{-ibK(2\zeta+2)} dK \\ d_{ml} = (-i)^{l+m} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\beta^2 \cdot \alpha}{F(K)} \cdot J_l(bK) \cdot J_m(-bK) \\ \quad \cdot e^{ibK(2\zeta+2)} dK \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} {}_1E_{n,m} = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 (1-\theta^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_m(\theta) \cdot v^n(\theta-\zeta-1) d\theta \\ {}_2E_{n,m} = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 (1-\theta^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_m(\theta) \cdot v^n(\theta+\zeta+1) d\theta \end{cases} \quad (32)$$

式(31)・(32)を式(29)・(30)に代入すると、 ${}_A C_l^n$ ・ ${}_B C_l^n$ を未知量とする連立方程式が得られ、次の様にマトリックス表示できる。

$$\begin{bmatrix} [a_{ml}] & [b_{ml}] \\ [d_{ml}] & [a_{ml}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ {}_A C_l^n \} \\ \{ {}_B C_l^n \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ {}_1E_{n,m} \} \\ \{ {}_2E_{n,m} \} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

但し  $m, l = 0 \sim L \quad n = 1 \sim 4$

上式で注意すべきは  $[a_{ml}]$ ・ $[b_{ml}]$ ・ $[d_{ml}]$  は  $n$  すなわち①～④の混合境界値問題に対し共通であり、一度だけ計算すれば良いことがわかる。式(33)の係数マトリックスは  $2 \cdot (L+1) \times 2 \cdot (L+1)$  のマトリックスであり、係数マトリックスの逆マトリックスが存在すれば  $\{ {}_A C_l^n \}$ ・ $\{ {}_B C_l^n \}$  は容易に求めることが出来る。すなわち式(33)より

$$[C_{\text{coeff}}] \{ \mathbf{C} \} = \{ \mathbf{E} \} \rightarrow \{ \mathbf{C} \} = [C_{\text{coeff}}]^{-1} \cdot \{ \mathbf{E} \} \quad (34)$$

式(34)より  $\{ {}_A C_l^n \}$ ・ $\{ {}_B C_l^n \}$  がわかると式(25)によって  $\sigma_n(x)$  が求まり式(17・1)に代入し問題は解けた事になる。

従って以下では式(31)・(32)を計算する事にする。

#### 4. 係数マトリックスの成分の計算

まず始めに  $a_{ml}$  を求める。式(31)より

$$a_{ml} = (-1)^{\frac{(3m+l)}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\beta^2 \cdot \alpha}{F(K)} \cdot J_l(bK) \cdot J_m(bK) dK \quad (35)$$

上式の被積分関数は  $m+l =$  偶数のとき偶関数であり  $m+l =$  奇数のとき奇関数となる。従って

$$\begin{cases} a_{ml} = 0 & m+l : \text{奇数} \\ a_{ml} = a_{lm} & m+l : \text{偶数} \end{cases} \quad (36)$$

となることが容易にわかる。以下では  $m+l$  は偶数である。

$$\begin{aligned} a_{ml} = & (-1)^{\frac{(m-l)}{2}} \cdot K_\beta^2 \cdot \left\{ \int_0^\infty \frac{\alpha}{F(K)} \cdot J_m(bK) \cdot H_1^{(1)}(bK) dK \right. \\ & \left. + \int_0^\infty \frac{\alpha}{F(K)} \cdot J_m(bK) \cdot H_2^{(2)}(K) dK \right\} \quad (37) \end{aligned}$$

但し  $m \geq l$  である

式(37)をこのままの形で積分することは出来ない。しかし複素  $K$  平面に拡張することによってこれらの積分を評価することが可能である。式中の  $H_1^{(1)}$ ・ $H_2^{(2)}$  は1種・2種のハンケル関数である。上記のハンケル関数は原点で極を持ちその次数は  $l$  であるが、ベッセル関数  $J_m$  は  $m$  次の零であり  $m \geq l$  の条件があれば、式(37)の積分は  $K=0$  で特異点となることを避けることが出来るようになっている。式(37)の  $H_1^{(1)}$  を含む積分は図3に示される様に第1象限の積分路に従って評価され、 $H_2^{(2)}$  を含む積分は第4象限の積分路に従って評価される。図中の  $K_a \cdot K_\beta$  は分岐点であり  $K_R$  は Rayleigh の極である。それぞれの積分路に対し次のパラメータを導入する。

$$\begin{cases} 0 < K < K_a : \alpha = \pm i\bar{\alpha} \quad \bar{\alpha}^2 = K_a^2 - K^2 \\ K = \pm i\gamma : \alpha = \pm i\bar{\alpha} \quad \bar{\alpha}^2 = \gamma^2 + K_a^2 \\ 0 < K < K_\beta : \beta = \pm i\bar{\beta} \quad \bar{\beta}^2 = K_\beta^2 - K^2 \\ K = \pm i\gamma : \beta = \pm i\bar{\beta} \quad \bar{\beta}^2 = K_\beta^2 + \gamma^2 \end{cases} \quad (38)$$

図3の各積分路に対し積分を実行すると、やや複雑であるので得られた結果のみを示すと

$$\begin{cases} \int_0^\infty \frac{\alpha}{F(K)} \cdot J_m(bK) \cdot H_1^{(1)}(bK) dK = \int_0^\infty \frac{i\bar{\alpha}}{F(i\gamma)} \cdot J_m(i\gamma) \\ \quad \cdot H_1^{(1)}(i\gamma) \cdot i d\gamma \\ \int_0^\infty \frac{\alpha}{F(K)} \cdot J_m(bK) \cdot H_2^{(2)}(bK) dK = -2\pi \cdot i \cdot \frac{\alpha_R}{F'(K_R)} \\ \quad \cdot J_m(K_R) \cdot H_2^{(2)}(K_R) + \int_0^\infty \frac{i\bar{\alpha}}{F(-i\gamma)} \cdot J_m(-i\gamma) \cdot \\ \quad H_2^{(2)}(-i\gamma) \cdot i d\gamma \end{cases}$$

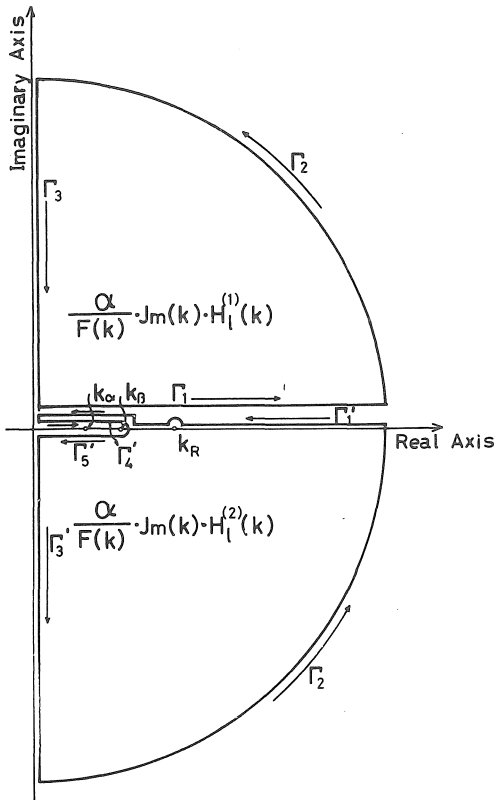


Fig. 3. Contour Integration in the Complex K-Plane (for the Branch Points and the Rayleigh Point).

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{K_\alpha} \frac{i \cdot 2\bar{\alpha}}{(2K^2 - K_\beta^2)^2 + 4K^2 \cdot \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}} \cdot J_m(K) \cdot H_l^{(2)}(K) dK \\
 & + \int_{K_\alpha}^{K_\beta} \frac{i \cdot 8 \cdot K^2 \cdot \alpha^2 \cdot \bar{\beta}}{(2K^2 - K_\beta^2)^4 + 16K^4 \cdot \alpha^2 \cdot \bar{\beta}^2} \cdot J_m(K) \cdot H_l^{(2)}(K) dK \\
 & m+l : \text{偶数} \quad m \geq l \quad (39)
 \end{aligned}$$

式(39)を式(37)へ代入し  $J_m(i\gamma) \cdot H_l^{(2)}(-i\gamma) = -J_m(i\gamma) \cdot H_l^{(1)}(i\gamma)$   $m+l : \text{偶数}$  と  $F(-i\gamma) = F(i\gamma)$  であることに注意すると

$$\begin{aligned}
 a_{ml} &= (-1)^{\frac{(m-l)}{2}} \cdot K_\beta^2 \cdot \left[ -2\pi \cdot i \cdot \frac{\alpha_R}{F(K_R)} \cdot J_m(bK_R) \cdot H_l^{(2)}(bK_R) \right. \\
 & + \int_0^{K_\alpha} \frac{i \cdot 2\bar{\alpha}}{(2K^2 - K_\beta^2)^2 + 4K^2 \cdot \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}} \cdot J_m(bK) \cdot H_l^{(2)}(bK) dK \\
 & \left. + \int_{K_\alpha}^{K_\beta} \frac{i \cdot 8K^2 \cdot \alpha^2 \cdot \bar{\beta}}{(2K^2 - K_\beta^2)^4 + 16K^4 \cdot \alpha^2 \cdot \bar{\beta}^2} \cdot J_m(bK) \cdot H_l^{(2)}(bK) dK \right] \\
 & m+l : \text{偶数} \quad m \geq l \quad (40)
 \end{aligned}$$

数値計算に当って便利な様に上式の無次元表示を行うと、わずかの計算によって次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 a_{ml} &= (-1)^{\frac{(m-l)}{2}} \cdot \left[ -2\pi \cdot i \cdot \frac{(\xi_R^2 - \delta^2)}{f'(\xi_R)} \cdot J_m(\Omega\xi_R) \cdot H_l^{(2)}(\Omega\xi_R) \right. \\
 & + \int_0^\delta \frac{i \cdot 2 \cdot (\delta^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-2\xi^2)^2 + 4\xi^2 \cdot (\delta^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \\
 & \quad \cdot J_m(\Omega\xi) \cdot H_l^{(2)}(\Omega\xi) d\xi + \\
 & \left. + \int_\delta^1 \frac{i \cdot 8\xi^2 \cdot (\xi^2 - \delta^2) \cdot (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-2\xi^2)^4 + 16\xi^4 \cdot (\xi^2 - \delta^2)(1-\xi^2)} \right. \\
 & \quad \left. \cdot J_m(\Omega\xi) \cdot H_l^{(2)}(\Omega\xi) d\xi \right]
 \end{aligned}$$

$$m+l : \text{偶数} \quad m \geq l \quad (40 \cdot 1)$$

ここで  $\xi = \frac{K}{K_\beta}$  無次元化波数  
 $\delta = \frac{K_\alpha}{K_\beta} = \left[ \frac{(1-2\sigma)}{2 \cdot (1-\sigma)} \right]^{\frac{1}{2}}$   
 但し  $\sigma$  はポアソン比  
 $f(\xi) = (1-2\xi^2)^2 - 4\xi^2 \cdot (\xi^2 - \delta^2) \cdot (\xi^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$   
 $f(\xi) : \text{無次元化された Rayleigh 関数}$   
 $\xi_R : \text{Rayleigh の極で } f(\xi_R) = 0 \text{ を満す}$

次  $b_{ml}$  は若干計算は異なるが同様に求めて求めることが出来、結果のみを次に示す。

$$\begin{aligned}
 b_{ml} &= (-1)^{\frac{(m-l)}{2}} \cdot \left[ -2\pi \cdot i \cdot \frac{(\xi_R^2 - \delta^2)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)} \cdot J_m(\Omega\xi_R) \right. \\
 & \quad \cdot H_l^{(2)}(\Omega\xi_R) \cdot \cos \Omega\xi_R \cdot (2\zeta + 2) \\
 & + \int_0^\delta \frac{i \cdot 2 \cdot (\delta^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-2\xi^2)^2 + 4\xi^2 \cdot (\delta^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \\
 & \quad \cdot J_m(\Omega\xi) \cdot H_l^{(2)}(\Omega\xi) \cdot \cos \Omega\xi (2\zeta + 2) d\xi \\
 & \left. + \int_\delta^1 \frac{i \cdot 8\xi^2 \cdot (\xi^2 - \delta^2) \cdot (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-2\xi^2)^4 + 16\xi^4 \cdot (\xi^2 - \delta^2) \cdot (1-\xi^2)} \right. \\
 & \quad \left. \cdot J_m(\Omega\xi) \cdot H_l^{(2)}(\Omega\xi) \cdot \cos \Omega\xi (2\zeta + 2) d\xi \right]
 \end{aligned}$$

$$m+l : \text{偶数} \quad m \geq l$$

$$b_{ml} = b_{lm} \quad m+l : \text{偶数}$$

$$\begin{aligned}
 b_{ml} &= (-1)^{\frac{(m-l-1)}{2}} \cdot \left[ -2\pi \cdot i \cdot \frac{(\xi_R^2 - \delta^2)^{\frac{1}{2}}}{f'(\xi_R)} \cdot J_m(\Omega\xi_R) \right. \\
 & \quad \cdot H_l^{(2)}(\Omega\xi_R) \cdot \sin \Omega\xi_R (2\zeta + 2) + \\
 & + \int_0^\delta \frac{i \cdot 2 \cdot (\delta^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-2\xi^2)^2 + 4\xi^2 \cdot (\delta^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \\
 & \quad \cdot J_m(\Omega\xi) \cdot H_l^{(2)}(\Omega\xi) \cdot \sin \Omega\xi (2\zeta + 2) d\xi \\
 & \left. + \int_\delta^1 \frac{i \cdot 8\xi^2 \cdot (\xi^2 - \delta^2) \cdot (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-2\xi^2)^4 + 16\xi^4 \cdot (\xi^2 - \delta^2)(1-\xi^2)} \right. \\
 & \quad \left. \cdot J_m(\Omega\xi) \cdot H_l^{(2)}(\Omega\xi) \cdot \sin \Omega\xi (2\zeta + 2) d\xi \right]
 \end{aligned}$$

$$m+l : \text{奇数} \quad m \geq l$$

$$b_{lm} = -b_{ml} \quad m+l : \text{奇数}$$

次に  $d_{ml}$  を求めるのであるがこれは  $b_{ml}$  によって次のように表わされる。

$$\begin{cases} d_{ml} = b_{ml} & m+l : \text{偶数} & m \geq l \\ d_{lm} = d_{ml} & m+l : \text{偶数} & \\ d_{ml} = -b_{ml} & m+l : \text{奇数} & m \geq l \\ d_{lm} = -d_{ml} & m+l : \text{奇数} & \end{cases} \quad (42)$$

式(41)・(42)を良く見ると次の関係があることがわかる。

$$[d_{ml}] = [b_{ml}]^T \quad (43)$$

すなわち転置の関係があり、式(34)の係数マトリックスは次の様になる。

$$[C_{\text{coeff}}] = \begin{bmatrix} [a_{ml}] & [b_{ml}] \\ [b_{ml}]^T & [a_{ml}] \end{bmatrix} = \text{対称マトリックス} \quad (44)$$

式(32)で表わされる  ${}_1E_{n,m} \cdot {}_2E_{n,m}$  を  $n=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$  の順に求め結果のみを示すと次の様になる。

$$\begin{cases} {}_1E_{1,m} = \begin{cases} 2 & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \\ {}_2E_{1,m} = {}_1E_{1,m} \end{cases} \quad (45 \cdot 1)$$

但しここで次の関係が使われている。

$$\int_{-1}^1 (1-\theta^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_m(\theta) \cdot T_l(\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq l \\ \pi/2 & m = l \neq 0 \\ \pi & m = l = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 (1-\theta^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_m(\theta) \cdot T_l(\theta) \cdot e^{\pm i \cdot bK\theta} d\theta =$$

$$(-i)^m \cdot \pi \cdot J_m(\mp bK) \quad (46)$$

$$\begin{cases} {}_1E_{2,m} = \begin{cases} -2 & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \\ {}_2E_{2,m} = \begin{cases} 2 & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (45 \cdot 2)$$

$$\begin{cases} {}_1E_{3,m} = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot 2 \cdot \cos \Omega \delta_1 (\zeta+1) \cdot J_m(\Omega \delta_1) & m : \text{偶数} \\ (-1)^{\frac{(m-1)}{2}} \cdot 2 \cdot \sin \Omega \delta_1 (\zeta+1) \cdot J_m(\Omega \delta_1) & m : \text{奇数} \end{cases} \\ {}_2E_{3,m} = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot 2 \cdot \cos \Omega \delta_1 (\zeta+1) \cdot J_m(\Omega \delta_1) & m : \text{偶数} \\ -(-1)^{\frac{(m-1)}{2}} \cdot 2 \cdot \sin \Omega \delta_1 (\zeta+1) \cdot J_m(\Omega \delta_1) & m : \text{奇数} \end{cases} \end{cases} \quad (45 \cdot 3)$$

$$\begin{cases} {}_1E_{4,m} = \begin{cases} -(-1)^{\frac{m}{2}} \cdot 2 \cdot \sin \Omega \delta_1 (\zeta+1) \cdot J_m(\Omega \delta_1) & m : \text{偶数} \\ (-1)^{\frac{(m-1)}{2}} \cdot 2 \cdot \cos \Omega \delta_1 (\zeta+1) \cdot J_m(\Omega \delta_1) & m : \text{奇数} \end{cases} \end{cases}$$

$${}_2E_{4,m} = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot 2 \cdot \sin \Omega \delta_1 (\zeta+1) \cdot J_m(\Omega \delta_1) & m : \text{偶数} \\ (-1)^{\frac{(m-1)}{2}} \cdot 2 \cdot \cos \Omega \delta_1 (\zeta+1) \cdot J_m(\Omega \delta_1) & m : \text{奇数} \end{cases} \quad (45 \cdot 4)$$

ここに  $\delta_1 = \frac{K_1}{K_\beta}$  (入射波の無次元化波数)

## 5. む す び

基礎—地盤系の地震時における相互作用の問題を地表における自由地表(応力度が零)の境界と基礎下の変位境界を含むいわゆる混合境界条件のもとで明らかにすることを目的に解析が行われた。解析結果を数値計算することによって二つの基礎が地盤を介して及ぼす影響を明らかにすることができる。結局問題はFredholm第1種積分方程式をいかに解くかであり、ここでは Galerkin の近似解法によって解かれている。解析と結果の考察が容易なように、入射波は上下動のみ、二つの基礎の基礎幅・重量を等しいとして扱っているが、これらの条件は本論文の方法を拡張することによって容易に取り除かれる。又別の機会に発表する予定である。本論文は2次元として扱われているが、3次元に関する適切なグリーン関数さえ見つければ、本論文の手法はそのまま3次元の波動問題に適用できる。

## 6. 参考文献

- 1) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木有・日下部馨：長方形基礎の Dynamical Ground Compliance (その1) — 半無限弾性地盤の場合 —, 京都大学防災研究所年報第10号A, 昭和42年3月。
- 2) 田治見宏：耐震理論に関する基礎的研究, 東大生研報告, 昭和34年3月。
- 3) 中村満喜男・多賀直恒・松岡理：二つの入力地動を受ける一層の建物の振動について, 日本建築学会大会学術講演梗概集(北陸), 昭和49年10月。
- 4) P.Karasudhi, L.M.Keer, S.L.Lee: Vibratory Motion of a Body on an Elastic Half Plane, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, December, 1968.
- 5) J.E.Luco, R.A.Westmann: Dynamic Response of a Rigid Footing Bonded to an Elastic Half Space, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, June, 1972.

- 6) I.C.Simpson: On the Interaction of Rayleigh Surface Waves with Structure, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol.6, 1978.
- 7) 井口道雄: 平面的に細長い構造物の地震時における挙動に関する基礎的研究, 第4回日本地震工学シンポジウム, 1975.
- 8) Michio Iguchi: Dynamic Interaction of Soil-Structure with Elastic Rectangular Foundation, 第5回日本地震工学シンポジウム, 1978.
- 9) 小堀鐸二・南井良一郎・篠崎祐三: S H波による半無限弾性地盤上の剛基礎の振動, 日本建築学会大会学術講演梗概集(近畿), 昭和46年11月.
- 10) 小堀鐸二・南井良一郎・篠崎祐三: S H波による半無限弾性地盤上の構造物の振動, 日本建築学会大会学術講演梗概集(九州), 昭和47年10月.
- 11) M.A.Oien: Steady Motion of a Rigid Strip Bonded to an Elastic Half Space, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, June, 1971.
- 12) M.A.Oien: Steady Motion of a Plate on an Elastic Half Space, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, December, 1968.
- 13) I.S.Gradshteyn, I.M.Ryzhik: Table of Integrals, Series and Products, Academic Press.
- 14) W.Maurice Ewing, Wenceslas S.Jardetzky, Frank Press: Elastic Waves in Layered Media, Mc Graw-Hill.
- 15) 佐藤泰夫: 弾性波動論, 岩波書店.  
(受理 昭和55年1月16日)