

幾何学非線形      材料非線形      非線形固有値

## 1 はじめに

本研究は幾何学的非線形と材料非線形を考慮した中心圧縮柱の座屈現象について考察した理論研究と実験研究である。

## 2 座屈荷重の定義

一般的に、柱部材の端部に鉛直軸力と水平せん断力が反力として作用しているとき、部材は図 A-1 に示す変形をしている。ここでは、材料が線形と非線形を問わず、微小変形でも大変形でも成立する条件を求める。部材中央部からの部材長  $s$  を媒介変数として、反力と変形の釣り合い式を点 P について求めると式 (A1) を得る。徐々に鉛直荷重を増大させていくと、部材端部のせん断力が失われる。このときの軸力を座屈荷重と定義すると、式 (A4) を得る。式 (A4) の両辺を微分すると式 (A5) を得る。

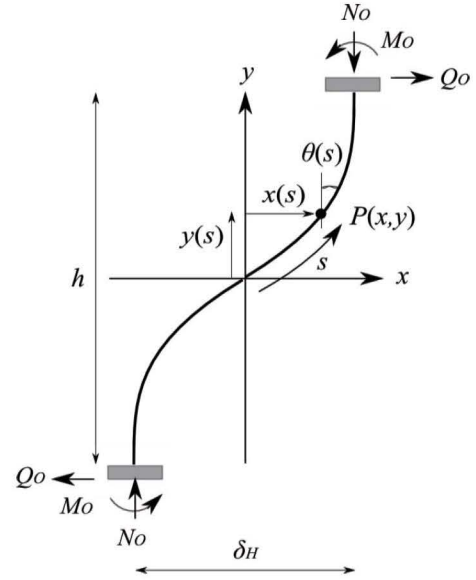


図 A-1 中心圧縮柱の変形と端部反力

$$M(s) = N_o x(s) + Q_o y(s) \quad (A1)$$

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta \quad (A2)$$

$$\frac{dy}{ds} = \cos \theta \quad (A3)$$

$$M(s) = N_{cr} x(s) \quad (A4)$$

$$\frac{dM}{ds} = N_{cr} \sin \theta \quad (A5)$$

ここで、

$s$  : 点 P を示す弧長媒介変数

$\theta(s)$  : 曲げモーメントによるたわみ角

$x(s)$  : 点 P の  $x$  座標

$y(s)$  : 点 P の  $y$  座標

$N(s)$  : 点 P の軸力

$Q(s)$  : 点 P のせん断力

$M(s)$  : 点 P の曲げモーメント

$Q_o$  : 部材端せん断力

$N_o$  : 部材端軸力

$M_o$  : 部材端曲げモーメント

$\delta_H$  : 荷重が作用した後の水平変位

$h$  : 荷重が作用した後の部材高さ

$l$  : 荷重が作用した後の部材長さ (初期長さは  $l_o$ )

一般的に、関数は微分方程式の解として与えられる。式 (A4) からは、変形の関数  $x(s)$  が満足する微分方程式と曲げモーメント  $M(s)$  が満足する微分方程式とは、一致することが分かる。この微分方程式が何を意味するのか解明することが座屈の本質を解明することになる。微分方程式とは物理現象をモデル化したもので、常にある仮説あるいは仮定の基に導かれるものである。従って、材料非線形モデル (仮説) を立てれば、そこから非線形微分方程式が得られ、解としての曲げモーメント分布が得られる。式 (A4) からは、その曲げモーメント分布は変形関数と定数倍を除いて等しいことが分かる。つまり、この微分方程式は固有方程式となることが予想され、非線形の座屈現象にも線形の座屈現象にも、固有値問題の存在が予想できるのである。しかも、この結論はどのような材料特性に対しても成立しなければならない。なぜなら式 (A4) のみから、得られた結論だからである。

次に、ある材料特性モデルを前提条件として設定すると、論理的な考察によって座屈状態の変形関数が具体的に決定する。材料特性モデル (前提条件) の妥当性は、理論解析予想と実験結果の一致によってのみ検証することができ、本研究の目的は、材料特性モデルの妥当性を、変形関数の実測によって検討することである。

### 3 材料特性モデルの仮説

曲率と曲げモーメントの比率が曲げ剛性であるが、曲げモーメントの増大に従って剛性低下が起きると仮定し、これを式(A6)で表現する。これは、仮説である。

$$-EI \frac{d}{ds} \left( \frac{dx}{ds} \right) = M(s) + \left( \frac{a^2}{M_o^2} \right) M^3(s) \quad (A6)$$

ここで、 $a^2$  : 材料の非線形を表わす指標で正值  
 $EI$  : 曲げ剛性の初期値

式(A6)は剛性の低下を表現したモデルで、本論文ではこれを非線形材料仮説として、座屈状態における中心圧縮柱の変形を導く。図 A-2 は、式(A6)を具体的に表現したもので、剛性の逆関数である柔性を表している。式(A4)から式(A7)が得られる。式(A7)を式(A6)に代入するとこの材料非線形仮説に対する微分方程式(A8)を得る。式(A8)を解くと式(A9)の楕円関数を得る。次に、式(A9)を2階微分して整理すると式(A10)を得る。式(A10)と式(A8)が恒等的に等しくなる条件から式(A11)と(A12)を得る。

$$\frac{d^2 M}{ds^2} = N_{cr} \frac{d}{ds} \left( \frac{dx}{ds} \right) \quad (A7)$$

$$\frac{d^2 M}{ds^2} + \frac{N_{cr}}{EI} \left( M(s) + \left( \frac{a}{M_o} \right)^2 M^3(s) \right) = 0 \quad (A8)$$

$$M(s) = -M_o(k) cn \left( \frac{s}{\lambda(k)} + K(k) \right) \quad (A9)$$

$$\frac{d^2 M}{ds^2} + \frac{1}{\lambda^2} \left( 1 - 2k^2 sn^2 \left( \frac{1}{\lambda} s + K(k) \right) \right) M = 0 \quad (A10)$$

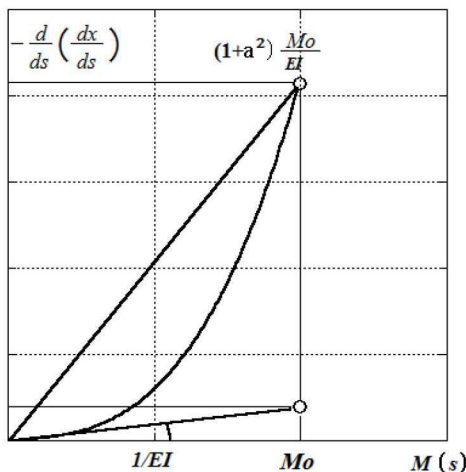


図 A-2 材料非線形の仮説 (式 A6 の物理的な意味)

$$\frac{1}{\lambda^2(k)} = \frac{N_{cr}}{EI(1-2k^2)} \quad (A11)$$

$$a^2 = \frac{2k^2}{1-2k^2} \quad (A12)$$

$$2K(k)\lambda(k) = l(k) = l_o \quad (A13)$$

更に、図 A-1 を考慮すると端部曲げモーメントの境界条件から式(A13)を得る。ここで、 $K(k)$ は第1種の完全楕円積分であり、パラメータ $k$ は楕円関数の母数である。塑性化の進展に伴って $k$ は増大するがその範囲は、次式の領域にある。

$$0 < k < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (A14)$$

### 4 非線形固有値問題と固有値の存在範囲

式(A10)は、式(A15)と式(A16)に分解することが出来る。式(A15)は時間に依存しないシュレディンガー方程式であり、式(A16)はそのポテンシャル関数 $V(s)$ である。これは固有値問題そのものである。このとき、式(A13), (A14)を参照して、固有値 $\lambda(k)$ の範囲を求めると式(A17)を得る。

$$\frac{d^2 M(s)}{ds^2} + \left( \frac{1}{\lambda^2} - V(s) \right) M(s) = 0 \quad (A15)$$

$$V(s) = \frac{2k^2}{\lambda^2} sn^2 \left( \frac{s}{\lambda(k)} + K(k) \right) \quad (A16)$$

$$\frac{l_o}{3.7} \approx \lambda \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \leq \lambda(k) \leq \lambda(0) = \frac{l_o}{\pi} \quad (A17)$$

結局、この問題の固有値は、線形固有値問題のように一定値ではないが、スペクトルの幅は比較的狭い範囲に収まっていることが解る。線形問題の延長で非線形座屈を考えると、座屈荷重が固有値であると考えたくなるので、固有値が大きく変動すると思いがちである。しかし、固有値は実はそれほど変動してはいない。鋼材の座屈では一気に変形が進み柱は崩壊するので座屈現象は非連続的な現象と見なされてきた。ところが、非線形座屈現象の固有値問題では固有値は連続的に、しかも少しだけ変動しているに過ぎない。さらに、曲げモーメント分布は式(A15)の固有関数である。従って解が存在する限り、 $M_o(k)$ の値は任意の値をとる。ただし、式(A4)を満足する変形の関数には幾何学的な境界条件があり、これを考慮しなければならない。結果として、変形の関数が満足すべき幾何学的境界条件を考慮すると、曲げモーメントの満足すべき境界条件が求まる。この境界条件からは、座屈荷重の上下界を推定することができる。

\* 東京都市大学 工学部 建築学科 教授  
 \*\* 愛知工業大学 工学部 建築学科 講師  
 \*\*\* 東京都市大学大学院 工学系研究科 建築学専攻修士

\* Prof., Dept. of Architecture, Tokyo City University  
 \*\* Lect., Dept. of Architecture, Aichi Institute of Technology  
 \*\*\* Graduate Student, Dep. of Architecture, Tokyo City University