愛知工業大学研究報告
第37号A 平成14年

積分の平均値の定理の拡張

Generalizations of the Mean Value Theorem of Integral

樋口　功[†]
Isao HIGUCHI

Abstract. Let $f(x)$ be continuous on the closed interval $[a,b]$. By the mean value theorem of integral, there exists a point ξ on $[a,b]$ satisfying

$$f(\xi)(b-a)=\int_a^b f(x)dx.$$

In other word, we can find a point $\xi\in[a,b]$ such that the straight line l defined by $y=\tilde{f}(x)=f(\xi)$ passing the point $(\xi,f(\xi))$ and parallel to the x-axis satisfies

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \tilde{f}(x)dx.$$

The aim of the present paper is to generalize the above mean value theorem of integration.

First, we shall prove the following

Theorem. *Suppose that* $f(x)$ *is continuous on* $[a,b]$. *Then the following statement holds:*

For any slope m *(resp. any point* $\eta\in[a,b]$ *), there exists a point* η *on* $[a,b]$ *(resp. a slope* m *) such that the straight line* $l: y=\tilde{f}_1(x)=f(\eta)+m(x-\eta)$ *passing the point* $(\eta,f(\eta))$ *and with slope* m *satisfies the following equality:*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \tilde{f}_1(x)dx.$$

And further, we shall extend the above theorem to the case of the curve defined by the polynomial of order n.

1. はじめに

連続関数の基本的な性質を挙げるならば，中間地の定理と最大値の定理ということになろう。これらは，微分積分論の二大頂上とも言える平均値の定理や微積分学の基本定理と深い関係をもっている。

次に述べる，**積分の平均値の定理** も，連続関数の積分に関する基本定理の一つである。

† 愛知工業大学　基礎教育センター　自然科学教室（豊田市）

積分の平均値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続であれば, 次式を満たす $\xi \in [a,b]$ が存在する。

$$f(\xi)=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$$

値 $f(\xi)$ は, 区間 $[a,b]$ 内で取る無限個の $f(x)$ の値の **平均値** *と呼ばれる。*

この積分の平均値の定理によると, 任意の連続関数の定積分は, x-軸に平行な直線を表す一次式の定積分と一致することになる。 複雑な一般の連続関数が, 積分に関しては, 単純な一次式として取り扱えるわけで, 理論および計算の両面からこの定理を見直す意味があると考えられる。

本研究で上の積分の定理を一般化することを試み, 次の定理を証明することが出来た。

定理.

区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し, 次の (1) および (2) が成り立つ。

(1). 任意の傾き m に対し, 点 $\eta \in [a,b]$ が少なくとも一つ存在し, 点 $(\eta, f(\eta))$ を通り, 傾き m の直線の方程式を $y=\tilde{f}_1(x)=f(\eta)+m(x-\eta)$ で表したとき,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \tilde{f}_1(x)dx=\int_a^b \{f(\eta)+m(x-\eta)\}dx$$

が成り立つように出来る。

(2). 任意の点 $\eta \in [a,b]$, $\eta \neq (a+b)/2$ に対し, 傾き m が存在し, 点 $(\eta, f(\eta))$ を通り, 傾き m の直線の方程式を $y=\tilde{f}_1(x)=f(\eta)+m(x-\eta)$ で表したとき,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \tilde{f}_1(x)dx=\int_a^b \{f(\eta)+m(x-\eta)\}dx$$

が成り立つように出来る。

積分の平均値の定理における直線の傾きを 0 から m に, 平均値 $f(\xi)$ を一般の値 $f(\eta)$ に拡張出来たことになる。 さら上の定理を一次式から n 次式に拡張し, 次の定理を示すことも出来た。

定理.

区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$, 2 以上の任意の自然数 n および任意の点 $\eta \in [a,b]$, $(\eta \neq \xi, \neq (a+b)/2)$ に対し, 点 $(\eta, f(\eta))$ を通る n-次曲線 : $y=\tilde{f}_n(x)$ が存在し,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \tilde{f}_n(x)dx$$

が成り立つように出来る。

上の定理においては，関数 $f(x)$ の連続性は仮定されたが，微分可能性はまったく仮定されていない。 この点に注意されたい。

2. 傾き m の直線への拡張

積分の平均値の定理を幾何学的に言い換えると，「任意の連続関数 $f(x)$ の定積分は，ある傾き 0 の直線 $y = C = \widetilde{f}(x)$ があって，定数関数 $\widetilde{f}(x)$ の定積分と一致する」となる。

本章では，上で述べた傾きを 0 から一般の実数 m へ拡張することを考えたい。
はじめに，次の形の拡張が得られた。

定理 1.

区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ および任意の傾き m に対し，点 $\eta \in [a,b]$ が少なくとも一つ存在し，点 $(\eta, f(\eta))$ を通り，傾き m の直線の方程式を

$$y = \widetilde{f}_1(x) = f(\eta) + m(x - \eta)$$

で表したとき，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \widetilde{f}_1(x)dx = \int_a^b \{f(\eta) + m(x-\eta)\}dx$$

が成り立つように出来る。

証明.

積分の平均値の定理より，

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

を満たす $\xi \in [a,b]$ が存在する。

従って，任意の $x \in [a,b]$ に対し，次式が成り立つ。

$$(*) \qquad I(f) = f(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a) - m\int_a^b (t-x)dt + m\int_a^b (t-x)dt$$

$$= \left\{ f(\xi) + \frac{m}{2}(a+b-2x) \right\}(b-a) + m\int_a^b (t-x)dt \quad .$$

ここで， $g(x) = f(\xi) - \dfrac{m}{2}(a+b-2x)$ と置いて，$f(\eta) = g(\eta)$ を満たす $\eta \in [a,b]$ が存在することを，三つの場合に分けて示す。

(イ). $f(\frac{a+b}{2}) = f(\xi)$ が成り立つとき。

$\eta = \frac{a+b}{2}$ と置けばよい。実際，下の等式が成り立つからである。

$$g(\eta) = f(\xi) - \frac{m}{2}(a+b-2\eta) = f(\xi) - \frac{m}{2}(a+b-a-b) = f(\xi) = f(\frac{a+b}{2}) = f(\eta)$$

(ロ). $f(\frac{a+b}{2}) > f(\xi)$ が成り立つとき。

まず，$g(\frac{a+b}{2}) = f(\xi) - \frac{m}{2}(a+b-a-b) = f(\xi) < f(\frac{a+b}{2})$ に注意する。

次に，

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left\{ f(\xi) + \frac{m}{2}(a+b-2x) \right\} dx = f(\xi)(b-a) - \frac{m}{4}\left[(a+b-2x)^2\right]_a^b$$

$$= f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

に注意する。$g(x)$ および $f(x)$ は連続だから，二つの式

$$g(\frac{a+b}{2}) < f(\frac{a+b}{2}) \quad \text{および} \quad \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

より，$g(c) > f(c)$ を満たす $c \in [a,b]$ が存在する。一方 $g(\frac{a+b}{2}) < f(\frac{a+b}{2})$ も

成り立っていたので，中間値の定理より，$g(\eta) = f(\eta)$ を満たす $\eta \in [a,b]$ が存在する。

この η がまさに求めていたものである。

(ハ). $f(\frac{a+b}{2}) < f(\xi)$ が成り立つとき。

このときも (ロ) の場合と同様に，中間値の定理により，$g(\eta) = f(\eta)$ を満たす $\eta \in [a,b]$ の存在を示すことが出来る。

上の (イ), (ロ),(ハ) いずれの場合においても，$g(\eta) = f(\eta)$ を満たす $\eta \in [a,b]$ の存在が分かったが，等式 $(*)$ より，任意の $x_0 \in [a,b]$ に対し，

$$I(f) = f(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a) - m\int_a^b (x-x_0)dx + m\int_a^b (x-x_0)dx$$

が成り立つので，$x = \eta$ と置くと

$$\int_a^b f(x)dx = I(f) = \left\{f(\xi)(b-a) - m\int_a^b (t-\eta)dt\right\} + m\int_a^b (t-\eta)dt$$

$$= \left\{f(\xi)(b-a) - \frac{m}{2}\Big[(x-\eta)^2\Big]_a^a\right\} + m\int_a^b (x-\eta)dx$$

$$= \left\{f(\xi) - \frac{m}{2}(a+b-2\eta)\right\}(b-a) + m\int_a^b (x-\eta)dx$$

$$= g(\eta)(b-a) + m\int_a^b (x-\eta)dx \quad = f(\eta)(b-a) + m\int_a^b (x-\eta)dx$$

$$= \int_a^b \{f(\eta) + m(x-\eta)\}dx \quad = \int_a^b \widetilde{f}_1(x)dx.$$

以上で, $f(x)$ の定積分が, 点 $(\eta, f(\eta))$ を通り, 傾き m の直線を表す一次関数

$$\widetilde{f}_1(x) = f(\eta) + m(x-\eta)$$

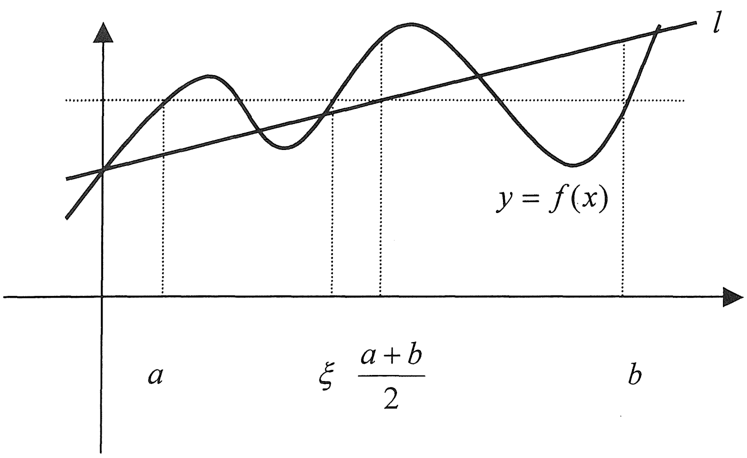
の定積分と一致することが分かり, 定理が証明された。

注意.

上の証明で確認した通り, 求める傾き m の直線の方程式は

$$y = \widetilde{f}_1(x) = f(\eta) + m(x-\eta) \quad = f(\xi) + m\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

で与えられた。 これは, 下の図で表された, 点 $\left(\dfrac{a+b}{a}, f(\xi)\right)$ を通り, 傾き m の直線と一致する。



定理 1 では, 任意の傾き m に対して, η の存在を示した。 逆に, 任意の $\eta \in [a,b]$ に対して傾き m の 存在を示せることも分かった。 すなわち, 次の定理が得られた。

定理 2.

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ 上で連続であると仮定する。

このとき, 任意の点 $\eta \in [a,b]$, $\eta \neq \frac{a+b}{2}$ に対し傾き m が存在し、 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(\eta, f(\eta))$ を通り傾き m の直線の方程式を

$$y = \tilde{f}_1(x) = f(\eta) + m(x-\eta)$$

で表して, $f(x)$ と $\tilde{f}_1(x)$ の $[a,b]$ 上の定積分が一致するように出来る, すなわち

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}_1(x)dx = \int_a^b \{f(\eta) + m(x-\eta)\}dx$$

が成り立つように出来る。

証明.

積分の平均値の定理より, 次式を満たす $\xi \in [a,b]$ が存在する。

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) = f(\eta)(b-a) + \{f(\xi) - f(\eta)\}(b-a)$$

ここで, 次の等式

$$\int_a^b (x-\eta)dx = \frac{1}{2}\left[(x-\eta)^2\right]_a^b = \left(\frac{a+b}{2} - \eta\right)(b-a)$$

に注意すると,

$$\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a) + \{f(\xi) - f(\eta)\}(b-a)$$

$$= f(\eta)(b-a) + \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\left(\frac{a+b}{2} - \eta\right)}\left(\frac{a+b}{2} - \eta\right)(b-a)$$

$$= \int_a^b \left\{ f(\eta) + \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\frac{a+b}{2} - \eta}(x-\eta) \right\}dx$$

上の変形において, 条件 $\eta \neq \frac{a+n}{2}$ を除くことは出来ない。

従って，$m=\dfrac{f(\xi)-f(\eta)}{\dfrac{a+b}{2}-\eta}$ と置き，さらに

$$\widetilde{f}_1(x)=f(\eta)+m(x-\eta)$$

と置けば

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\{f(\eta)+m(x-\eta)\}dx=\int_a^b\widetilde{f}_1(x)dx$$

が成り立ち，定理の証明が終わる。

3. n 次曲線への拡張

2 章では，積分の平均値の定理における傾き 0 の直線の話を，傾き m の直線に場合に拡張したが，3 章では，n 次曲線にまで一般化したい。

次の定理 3 が得られた。

定理 3.

区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$，2 以上の任意の自然数 n および任意の点 $\eta\in[a,b]$，$\eta\neq\xi$ に対し，点 $(\eta,f(\eta))$ を通る n-次曲線 $y=\widetilde{f}_n(x)$ が存在し，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\widetilde{f}_n(x)dx$$

が成り立つように出来る。ここで，$\xi\in[a,b]$ は $f(x)$ の平均値を与える点である。

証明.

積分の平均値の定理より，

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)=f(\eta)(b-a)+\{f(\xi)-f(\eta)\}(b-a)$$

を満たす $\xi\in[a,b]$ が存在する。

等式

$$\int_a^b(x-\eta)^n\,dx=\frac{1}{n+1}\left\{(b-\eta)^{n+1}-(a-\eta)^{n+1}\right\}$$

により $I(f)$ を変形すると，

$$\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)+\{f(\xi)-f(\eta)\}(b-a)$$

だったから，

$$\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a) + \frac{(n+1)\{f(\xi)-f(\eta)\}}{(b-\eta)^{n+1}-(a-\eta)^{n+1}}(b-a)\frac{1}{n+1}\{(b-\eta)^{n+1}-(a-\eta)^{n+1}\}$$

すなわち

$$\int_a^b f(\eta)(b-a) + \int_a^b \frac{(n+1)\{f(\xi)-f(\eta)\}(b-a)}{(b-\eta)^{n+1}-(a-\eta)^{n+1}}(x-\eta)^n dx \quad .$$

そこで

$$m = \frac{(n+1)\{f(\xi)-f(\eta\}(b-a)}{(b-\eta)^{n+1}-(a-\eta)^{n+1}}(\neq 0) \quad ,$$

$$\widetilde{f}_n(x) = f(\eta) + m(x-\eta)^n$$

により m および n 次式 $\widetilde{f}_n(x)$ を定めれば, 等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \{f(\eta)+m(x-\eta)^n\}dx = \int_a^b \widetilde{f}_n(x)dx$$

が成り立ち, 定理が証明された。

注意.

(1). 定理 2 における 1 次式を n 次式に拡張したものが定理 3 である。

(2). $f(x)$ が $[a,b]$ で C^{n-1} 級関数であれば, 定理 1 における 1 次式を n 次式に拡張できる。

しかし, 一般の連続関数 $f(x)$ に対しても, 定理 1 における 1 次式を n 次式まで拡張出来るか否か, 筆者には不明である。

(受理　平成14年3月19日)