愛知工業大学研究報告
第 34 号 A　平成11年

シンプソン公式と同等の精度を持つ新台形公式について

On the new trapezoid rule with the same precision as that of the Simpson's rule

樋口功

Isao HIGUCHI

Abstract

In this study, we first try to establish the generalized trapezoid rule in the theory of numerical integrals by the inverse calculation from the order of error estimations.

Next, we shall prove that there exists one and only one trapezoid rule that has the same precision as that of the Simpson's rule.

Finally, we shall give the concrete form of the above new trapezoid rule.

1．序

原始関数が必ずしも求まらない関数の，近似積分公式の代表的なものとして，台形則および Simpson 則が昔から知られている。

台形則は被積分関数　$f(x)$　を一次式で近似し積分して導かれる２点近似式であり，Simpaon 則は　$f(x)$　を二次式で近似し積分して得られる３点近似式である。一次と二次の，あるいは２点と３点の違いにより，両者の精度に差が生じる。実際，積分区間　$[a,b]$　の巾を　$h=b-a$　と置くと，台形則の誤差は　$O(h^3)$　で, Simpson 則の誤差は２ランク上の　$O(h^5)$　である。

Simpson 公式は，精度は高いが，複雑な３点近似式である。　より単純な２点近似式で，Simpson 則と同等の精度を持つような積分公式を作り出せないだろうか？

本研究では, これまでのように，$f(x)$　の近似関数を初めに考える方法を止め，誤差の評価の次数から出発して，逆算するかたちで，Gauss 型積分公式を導くことを試みた。

以下の結果が得られたので報告する。

1. 誤差が $O(h^3)$ となる２点近似積分公式は無数に存在し，その一般形が次のように表される。 関数 $f \in C^2$ に対し，

$$\tilde{I}_{s,t}(f) = \frac{h}{2(t-s)}\Big\{(2t-1)f(a+sh) + (1-2s)f(a+th)\Big\},\ s,t \in [0,1],\ s \neq t$$

2. 誤差が $O(h^4)$ となる２点近似積分公式は無数に存在し，その一般形が次のように表される。 関数 $f \in C^3$ に対し，

$$\tilde{T}_t(f) = \frac{h}{4(3t^2-3t+1)}\Big\{3(2t-1)^2 f\Big(a + \frac{3t-2}{3(2t-1)}h\Big) + f(a+th)\Big\},\ t \in [0,1],\ t \neq \frac{1}{2}$$

3. 誤差が $O(h^5)$ となる２点近似積分公式は一つ，唯一つ存在し，その形は次のように定まる。 関数 $f \in C^4$ に対し，

$$\tilde{T}(f) = \frac{h}{2}\Big\{f\Big(a + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h\Big) + f\Big(a + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h\Big)\Big\}$$

2. 誤差が $O(h^3)$ となる一般台形公式

任意の実数 p, q および $[0,1]$ 内の任意の実数 s, t に関する２点近似積分公式を，$\tilde{I}(f)$，その誤差を $E_{\tilde{I}}(f)$ と置く，すなわち

$$\tilde{I}(f) = h\Big\{pf(a+sh) + qf(a+th)\Big\},$$

$$E_{\tilde{I}}(f) = \tilde{I}(f) - I(f) = \tilde{I}(f) - \int_a^{a+h} f(x)dx$$

とする。

先ず，$E_{\tilde{I}}(f) = O(h^3)$ が成り立つような p, q, s, t の関係を調べる。

定理1. 任意の関数 $f \in C^2$ および任意の区間 $[a,b]$ に対し，$E_{\tilde{I}}(f) = O(h^3)$ が成り立つとき， s, t $\in [0,1]$, $s \neq t$ で，かつ

$$p = \frac{2t-1}{2(t-s)}, \qquad q = \frac{1-2s}{2(t-s)}$$

が成り立つ。すなわち， $E_{\tilde{I}}(f) = O(h^3)$ となる２点近似積分公式の一般形は次のように表される。 s, t $\in [0,1]$, $s \neq t$ で，関数 $f \in C^2$ に対し，

$$\tilde{I}(f) = \tilde{I}_{s,t}(f) = \frac{h}{2(t-s)}\Big\{(2t-1)f(a+sh) + (1-2s)f(a+th)\Big\}$$

証明. $f \in C^2$ だから，Taylor の定理により，次式を満たす $c,\ d,\ e\ \in (a,b)$ が存在する。

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h} \left\{f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2!}f''(c)(x-a)^2\right\} dx$$

$$= f(a)h + \tfrac{1}{2}f'(a)h^2 + O(h^3)$$

$$\tilde{I}(f) = h\Big\{pf(a+sh) + qf(a+th)\Big\}$$

$$= h\Big[p\Big\{f(a) + f'(a)sh + \tfrac{1}{2!}f''(d)(sh)^2\Big\} + q\Big\{f(a) + f'(a)th + \tfrac{1}{2!}f''(e)(th)^2\Big\}\Big]$$

このとき

$$E_{\tilde{I}}(f) = \tilde{I}(f) - I(f) = (p+q-1)f(a)h + (ps+qt-\frac{1}{2})f'(a)h^2 + O(h^3)$$

だから，すべての区間 $[a,b]$, 従って任意の h および任意の $f \in C^2$ に対し

$$E_{\tilde{I}}(f) = O(h^3)$$

が成り立つなら

$$p + q = 1$$

$$ps + qt = \frac{1}{2}$$

これを解いて，p, q を s, t で表すと，

$$p = \frac{2t-1}{2(t-s)}, \qquad q = \frac{1-2s}{2(t-s)}, \qquad s \neq t$$

となる。このとき

$$\tilde{I}(f) = \tilde{I}_{s,t}(f) = \frac{h}{2(t-s)}\Big\{(2t-1)f(a+sh) + (1-2s)f(a+th)\Big\}, \quad s \neq t$$

で，定理が成り立つ。

例. $s,\ t$ の値に対応し，下のように $\tilde{I}(f)$ の具体的な形が決まる。

(1).　$s=\frac{1}{2}$ または $t=\frac{1}{2}$ と置くと，中点則 $M(f)$ が得られる。

$$M(f)=\tilde{I}_{\frac{1}{2},t}(f)=\tilde{I}_{s,\frac{1}{2}}=h\Big\{f(a+\tfrac{1}{2}h)\Big\}$$

(2).　$(s,t)=(0,1)$ と置くと，古典的な台形則 $T(f)$ が得られる。

$$T(f)=\tilde{I}_{0,1}(f)=\tfrac{h}{2}\Big\{f(a)+f(a+h)\Big\}$$

(3).　上の (1), (2) 以外の (s,t) の値の組に対し，たとえば，$(s,t)=(\frac{1}{4},1)$ と置くと，誤差が $O(h^3)$ である次のような２点近似積分公式が得られる。

$$\tilde{I}_{\frac{1}{4},1}(f)=\tfrac{h}{3}\Big\{2f(a+\tfrac{1}{4}h)+f(a+h)\Big\}$$

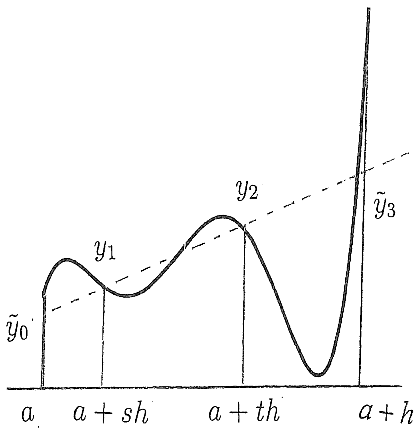
次の定理２は定理１を幾何学的に意味付けしたものである。これにより，以後，積分公式 $\tilde{I}(f)$ を **一般台形公式** と呼ぶことにする。

定理 2.　定理１で得られた一般２点近似積分公式

$$\tilde{I}(f)=\tilde{I}_{s,t}(f)=\frac{h}{2(t-s)}\Big\{(2t-1)f(a+sh)+(1-2s)f(a+th)\Big\}$$

は，　曲線 $y=f(x)$ を，２点 $\big(a+sh, f(a+sh)\big)$, $\big(a+th, f(a+th)\big)$ を通る直線で近似して，区間 [a,b] 上で積分したものと一致する。

証明.



左図のように２点

$$(a+sh,y_1)=\Big(a+sh,f(a+sh)\Big),$$

$$(a+th,y_2)=\Big(a+th,f(a+th)\Big)$$

を通る直線の方程式は下のようになる。

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{(t-s)h}\Big(x-(a+sh)\Big)$$

直線と $x=a$, $x=a+h$ との交点の y 座標 $\tilde{y}_0$, $\tilde{y}_3$ は次のようになる。

$$\tilde{y}_0=y_1+\frac{y_2-y_1}{(t-s)h}(-sh)=y_1-\frac{s}{t-s}(y_2-y_1)$$

$$\tilde{y}_3=y_1+\frac{y_2-y_1}{(t-s)h}(1-s)h=y_1+\frac{1-s}{t-s}(y_2-y_1)$$

台形の面積＝(上底＋下底)×(高さ)/2 より

$$\tilde{I}(f) = \frac{h}{2}\{\tilde{y}_0 + \tilde{y}_3\} = \frac{h}{2}\Big\{2y_1 + \frac{1-2s}{t-s}(y_2 - y_1)\Big\} = \frac{h}{2(t-s)}\Big\{(2t-1)y_1 + (1-2s)y_2\Big\}$$

$$= \frac{h}{2(t-s)}\Big\{(2t-1)f(a+sh) + (1-2s)f(a+th)\Big\}$$

で，$\tilde{I}(f)$ 台形の面積と一致し，定理２が証明された。

注意．定理１，２により，誤差が $O(h^3)$ となる２点近似公式は，古典的台形則の他にも無数に存在することが分かった。 またそれらは，被積分関数を一次式で近似し，積分して得られる一種の台形公式であることも示された。

3. 誤差が $O(h^4)$ となる一般台形公式

定理１で導かれた一般台形公式

$$\tilde{I}(f) = \tilde{I}_{s,t}(f) = \frac{h}{2(t-s)}\Big\{(2t-1)f(a+sh) + (1-2s)f(a+th)\Big\}$$

の誤差は,任意の $s,\ t\ \in [0,1],\ \ s \neq t$ に対し $O(h^3)$ であった。
更に１ランク改良されて，誤差が $O(h^4)$ となるための $s,\ t$ の条件を考察する。

定理 3. 任意の関数 $f \in C^3$ および任意の区間 $[a,b]$ に対し，$E_{\tilde{I}_{s,t}}(f) = O(h^4)$ が成り立つための必要十分条件は，$t \neq \frac{1}{2}$ かつ

$$s = \frac{3t-2}{3(2t-1)}$$

が成り立つことである。 すなわち, 誤差が $O(h^4)$ となる一般台形公式は

$$\tilde{T}_t(f) = \frac{h}{4(3t^2-3t+1)}\Big\{3(2t-1)^2 f\Big(a + \frac{3t-2}{3(2t-1)}h\Big) + f(a+th)\Big\}, \qquad t \neq \frac{1}{2}$$

の形のものに限られる。

証明. $f \in C^3$ だから，Taylor の定理により，次式を満たす $\zeta, \eta, \xi, \in (a,b)$ が存在する。

$$\tilde{I}(f) = h\Big\{pf(a+sh) + qf(a+th)\Big\}$$

$$= h\Big[p\Big\{f(a) + f'(a)sh + \tfrac{1}{2!}f''(a)(sh)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(\zeta)(sh)^3\Big\}$$

$$+q\Big\{f(a) + f'(a)th + \tfrac{1}{2!}f''(a)(th)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(\eta)(th)^3\Big\}\Big]$$

$$I(f) = \textstyle\int_a^{a+h} \Big\{f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(\xi)(x-a)^3\Big\}dx$$

$$= f(a)h + \tfrac{1}{2}f'(a)h^2 + + \tfrac{1}{3!}f''(a)h^3 + O(h^4)$$

このとき

$$E_{\tilde{I}}(f) = \tilde{I}(f) - I(f)$$

$$= (p+q-1)f(a)h + (ps+qt-\tfrac{1}{2})f'(a)h^2$$

$$+\Big\{\tfrac{1}{2}(ps^2+qt^2) - \tfrac{1}{3!}\Big\}f''(a)h^3 + O(h^4)$$

従って，すべての区間 $[a,b]$，従って任意の h および任意の $f \in C^3$ に対し

$$E_{\tilde{I}}(f) = O(h^4)$$

が成り立つための必要十分条件は次の３式が成り立つことである。

$$p + q = 1$$

$$ps + qt = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}(ps^2 + qt^2) = \frac{1}{3!}$$

定理１の証明と同様に，上の第一，二式を満たす p, q を s, t で表すと，

$$p = \frac{2t-1}{2(t-s)}, \qquad q = \frac{1-2s}{2(t-s)}, \qquad s \neq t$$

であった。 これらを第三の式に代入すると，

$$3\frac{2t-1}{2(t-s)}s^2+3\frac{1-2s}{2(t-s)}t^2=1$$

ゆえに,

$$3s^2-6s^2t+6st^2-3t^2=2(s-t)$$

$$3(s-t)(s+t)-6st(s-t)=2(s-t)$$

ここで $s\neq t$ だったから, $s-t$ で割ると

$$3s(1-2t)=2-3t$$

$t\neq\frac{1}{2}$ は明らかだから, $1-2t$ で割ると

$$s=\frac{3t-2}{3(2t-1)},\quad t\neq\frac{1}{2}$$

従って,

$$p=\frac{3(2t-1)^2}{4(3t^2-3t+1)},\qquad q=\frac{1}{4(3t^2-3t+1)}$$

で, 定理が成り立つ。

例. 下の例は, いずれも誤差が $O(h^4)$ となる新台形公式である (文献 [3] を参照)。

(1). $t=0$ または $\dfrac{2}{3}$ と置くと,

$$\tilde{T}_0(f)=\tilde{T}_{\frac{2}{3}}(f)=\frac{h}{4}\Big\{f(a)+3f\Big(a+\frac{2}{3}h\Big)\Big\}$$

(2). $t=\dfrac{1}{3}$ または 1 と置くと,

$$\tilde{T}_{\frac{1}{3}}(f)=\tilde{T}_1(f)=\frac{h}{4}\Big\{3f(a+\frac{h}{3})+f(a+h)\Big\}$$

(3). $t=\dfrac{3}{4}$ と置くと,

$$\tilde{T}_{\frac{3}{4}}(f)=\frac{h}{7}\Big\{3f(a+\frac{h}{6})+4f(a+\frac{3}{4}h)\Big\}$$

4. 誤差が $O(h^5)$ となる最良の２点近似積分公式

最後に，２点近似公式であって，３点近似公式の Simpson 則と同等の精度を持つものが唯一つ存在することを示し，かつその具体的な形を与える。

定理 4.　２点近似積分公式

$$\tilde{I}(f) = h\Big\{pf(a+sh) + qf(a+th)\Big\}$$

の中で，任意の関数 $f \in C^4$ および任意の区間 $[a, b]$，従って任意の h に対し，$E_{\tilde{I}}(f) = O(h^5)$ となるものが一つ，唯一つ存在する。この最良の２点近似公式 $\tilde{T}(f)$ に対しては,

$$p = q = \frac{1}{2}, \qquad s = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \qquad t = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

が成り立ち，具体的な形は次のように定まる。

$$\tilde{T}(f) = \frac{h}{2}\left\{f\Big(a + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h\Big) + f\Big(a + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h\Big)\right\}$$

証明.　$f \in C^4$ だから，Taylor の定理より下の式を満たす $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ \in (a, b)$ が存在する。

$$\tilde{I}(f) = h\Big\{pf(a+sh) + qf(a+th)\Big\}$$

$$= h\Big[p\Big\{f(a) + f'(a)sh + \tfrac{1}{2!}f''(a)(sh)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(a)(sh)^3 + \tfrac{1}{4!}f^{(4)}(\alpha)(sh)^4\Big\}$$

$$+q\Big\{f(a) + f'(a)th + \tfrac{1}{2!}f''(a)(th)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(a)(th)^3 + \tfrac{1}{4!}f^{(4)}(\beta)(th)^4\Big\}\Big]$$

$$I(f) = \int_a^{a+h} \Big\{f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \tfrac{1}{4!}f^{(4)}(\gamma)(x-a)^4\Big\}\, dx$$

$$= f(a)h + \tfrac{1}{2}f'(a)h^2 + + \tfrac{1}{3!}f''(a)h^3 + \tfrac{1}{4!}f'''(a)h^4 + O(h^5)$$

このとき

$$E_{\tilde{I}}(f) = \tilde{I}(f) - I(f)$$

$$= (p+q-1)f(a)h + (ps+qt-\tfrac{1}{2})f'(a)h^2 + \Big\{\tfrac{1}{2}(ps^2+qt^2) - \tfrac{1}{3!}\Big\}f''(a)h^3$$

$$+\Big\{\tfrac{1}{3!}(ps^3+qt^3) - \tfrac{1}{4!})\Big\}f'''(a)h^4 + O(h^5)$$

よって，すべての区間 $[a,b]$，従って任意の h および任意の $f \in C^3$ に対し

$$E_{\tilde{I}}(f) = O(h^5)$$

が成り立つための必要十分条件は次の４式が成り立つことである。

$$p+q=1, \quad ps+qt=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}(ps^2+qt^2)=\frac{1}{3!}, \quad \frac{1}{3!}(ps^3+qt^3)=\frac{1}{4!}$$

定理３の証明において，上のはじめの３式を満たす s，p，q を t で表すと，

$$s=\frac{3t-2}{3(2t-1)}$$

$$p=\frac{3(2t-1)^2}{4(3t^2-3y+1)}$$

$$q=\frac{1}{4(3t^2-3t+1)}$$

で，さらに，$t \neq \dfrac{1}{2}$ であった。これらを上の第四式に代入すると，

$$3\frac{(2t-1)^2}{3t^2-3t+1} \times \frac{(3t-2)^3}{3^3(2t-1)^3} + \frac{t^3}{3t^2-3t+1} = 1$$

$t \neq \dfrac{1}{2}$ に注意してこれを整理すると，

$$18t^4-36t^3+27t^2-9+1=0$$

$$(3t^2-3t+1)(6t^2-6t+1)=0$$

よって，

$$t=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}, \qquad p=q=\frac{1}{2}$$

従って，

$$\tilde{T}(f)=\frac{h}{2}\left\{f\left(a+\frac{3-\sqrt{3}}{6}h\right)+f\left(a+\frac{3+\sqrt{3}}{6}h\right)\right\}$$

となり，定理が証明された。

参考文献

[1] 稲山久也, 樋口功, 被積分関数の滑らかさによる数値積分公式の誤差の評価について, 愛知工業大学研究報告, 33 号 A, 1998.

[2] 篠崎壽夫, 松下祐輔, 応用数学計算法入門 (上), (下), コロナ社, 1971.

[3] 清水麻希子, 冨永真琴, 樋口功, 誤差の評価から逆算した閉型積分近似公式について, 愛知工業大学研究報告, 34 号 A, 1999.

[4] 杉浦洋, 入門数値計算, サイエンス社, 1997.

[5] 高田勝, 機械計算法, 養賢堂, 1994.

[6] 山本哲朗, 数値解析入門, サイエンス社, 1995.

[7] F.B.Hidebrand, Introduction to numerical analysis, MacGraw-Hill, 1974.

[8] A.Ralston and P.Rabinowitz, A first course in numerical analysis, MacGraw-Hill, 1986.

[9] J.Stoer and R.Bulirsch, Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, 1996.

（受理　平成11年３月20日）