

WIMの構築アルゴリズムにおける発育学的検証

— 生物学的意味におけるフーリエ補間との比較論議 —

A Verification of Constructive Algorithm of Wavelet Interpolation Method in Growth Study

- Comparison with Fourier interpolation in biological meaning -

藤井 勝 紀*

Katsunori Fujii

川 浪 憲 一**

Kenichi Kawanami

ABSTRACT Advantages of wavelet analysis is mathematically expressed by overcoming drawback of Fourier analysis. However, wavelet interpolation has not been compared with Fourier interpolation in meaning of growth study. This paper is tried to verify the algorithm of WIM(Wavelet Interpolation Method) by comparison between wavelet and Fourier interpolation in meaning of growth study. The algorithm of Fourier interpolation is mathematically explained and applied to a longitudinal growth data from 6 to 17 in height of boy. The first derivative curves derived by Fourier and wavelet interpolations which were applied to the growth data are compared between the both interpolations. The advantages of wavelet interpolation (WIM) are derived from the discussion regarding the comparison.

緒 言

ウェーブレット (Wavelet) とは元来「小さな波」あるいは「さざなみ」を意味する言葉である。工学分野では、振動や波動を扱う場合、局所的な振動波形を表す用語として古くから用いられてきた。近年、数学の分野で抽象的枠組が整えられ、積分変換の離散化が試みられ、滑らかなウェーブレットによる完全正規直交基底を組み立てることに成功した。

このような中で、藤井^{1) 2) 3) 4) 5)}はウェーブレットを成長学に導入した。その背景には、成長現象解明のために、数学的関数による曲線の記述が構成されてきたこと、それと、成長現象が年齢という時系列によって構成されることに端を発していることにある。通常時系列を扱う場合、フーリエ解析が良く

知られている。多くの場合、FFTなどを用いて基のデータをフーリエ変換し、フーリエスペクトルを描いてみることで、主要な周期の同定が行われる。この場合、周期性の検出にはフーリエ変換の積分核である $e^{i\omega t}$ という関数が周期関数であることにある。また、周期性とは別の用途にフーリエ変換を用いる場合、データに含まれる相似性を検出する道具としてのフーリエ変換である。通常、データの時系列が自己相似的な構造を持っている場合、スペクトルの形はべき関数となる。このようにフーリエ解析は周期性と相似性の検出に優れている。

しかしながら、いつもフーリエ解析が便利なわけではない。フーリエスペクトルはフーリエ変換の位相部分を消去した量で時刻に関する情報を失っているため、スペクトルと局所事象との対応関係を見出す事ができない。そこで、このような欠点を克服するためにウェーブレット解析^{6) 7) 8) 9)}が提唱された。つまり、データの持つ局所相似性の解析には最

* 愛知工業大学

**名古屋市立大学医学部

適であり、特に、スペクトルのべき則を伴う現象の解析やデータ関数の各点毎の特異性強度の検出には非常に有効といえる。

このように、今まで述べてきた事は数学的な理論的根拠に基づく事実であり、明確なウェーブレット解析の有効性を示す解釈といえる。このことを数学的に端的に示すと以下ようになる。

$$(1-1) f(t) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)$$

上式は一般的なフーリエ級数である。この式をオイラーの公式に従って変形すると以下の式になる。

$$(1-2) f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t}$$

上式から理解されるように、関数の異常性（不連続性）等はフーリエ係数 c_n の減衰オーダーに反映されているとはいうものの、その異常性を正確につきとめることはできない。この異常性を正確につきとめるためには上式に時刻のパラメーターを加える必要がある。実はその発想がウェーブレットになるわけである。今、2つの実数パラメーター a, k を用いて作られる特殊な関数 $\psi(x)$ を(1-3)とする。

$$(1-3) \psi_{a,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-k}{a}\right)$$

上式から分かるように、元の関数（通常はmother waveletと呼ばれている） $\psi(x)$ を横軸に a 倍、縦軸に $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ 倍それぞれ拡大した後、さらに横軸に k だけ平行移動させたものである。フーリエ級数と根本的に違う点は時刻のパラメーターとしての k が設定されていることにある。すなわち、ウェーブレットとは基本的に相似の変形と平行移動によって得られる一群の関数のことである。

さて、ここでやみくもにウェーブレットを集めても実用にはならない。通常、実用のために旨く離散化すると以下の式になる。

$$(1-4) f(t) = \sum_{j,k} a_{j,k} \psi(2^j t - k)$$

上式はウェーブレット展開式で、実用として用いる場合は2のべき乗としている点である。 j はスケール、 k は位置（時刻）のパラメーターである。通常、実用化としてはこの式が適用されるが、具体的な演算に際してはさらに複雑な式になる。

以上の数学的説明は、一般的にはスペクトル解析に適用されるが、成長曲線記述に対する発育学的意味を与えているわけではない。つまり、フーリエ、ウェーブレット両解析ともデータとデータを補間する点と、微分可能な点は共通な要素を備えており、成長曲線を記述する点において、両者の違いが数学的説明によって旨く反映されない問題が生起する。したがって、このような問題点を発育学的意味において解決する必要性がある。そこで、発育データに対しフーリエ補間を適用し、発育データ記述の妥当性をウェーブレット補間と比較し、成長曲線記述における具体的なアルゴリズムの検証を考察する。

フーリエ補間

フーリエ級数により、与えられたデータとデータの間を補間することであるが、一般的には与えられた波状データとデータの間を補間することによって合成波が形成され、その合成波を単純な波に分解することがいわゆるフーリエ解析である。我々は、このフーリエ級数による補間の手続きを成長曲線の記述に適用できるように構成した。

まず、フーリエ級数の一般式を示すと

$$(2-1) F(t) = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos \omega t + b_n \sin \omega t)$$

上式のようになり、この式を実際に与えられた発育データに適用する。上式によって導かれた曲線は発育現量値曲線として扱われる。そして、上式を微分することにより得られた曲線は速度曲線となる。上式を微分すると以下ようになる。

$$(2-2) f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-a_n \sin \omega t + b_n \cos \omega t)$$

(2-1), (2-2)の両式を使って成長曲線の記述を試みる。

フーリエ補間の手続きは以下の通りである。

1. 測定データ $\{(t_i, y_i) : i = 1, 2, \dots, 12\}$ を得る。ここでは、 t_i は年齢、 y_i は身長が発育現量値とする。
2. 12の未知数を持つ連立一次方程式を構成する。

$$y(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t + a_4 \cos 4\omega t + b_4 \sin 4\omega t + a_5 \cos 5\omega t + b_5 \sin 5\omega t + a_6 \cos 6\omega t \dots (1)$$

3. (1)式に実際の観測値(身長の発育現量値) $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{11}, y_{12}$ を当てはめて連立一次方程式を解く。(n=12, 30° 間隔)

$$\begin{matrix} 30^\circ \\ 60^\circ \\ 90^\circ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 360 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \cos \omega & \sin \omega & \cos 2\omega & \dots & \sin 5\omega & \cos 6\omega \\ 1 & \cos 2\omega & \sin 2\omega & \cos 4\omega & \dots & & \\ 1 & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{11} \\ y_{12} \end{bmatrix}$$

4. 求められた係数 $a_0, a_1, b_1, a_2, \dots, b_5, a_6$ を(1)式に代入して、適當年齢間隔で計算し、コンピューターシミュレーションする。
5. 発育速度曲線を導くために、(1)式を微分すると以下の式になる。

$$y'(t) = -a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t - 2a_2 \sin 2\omega t + 2b_2 \cos 2\omega t - \dots + 5b_5 \cos 5\omega t - 6a_6 \sin 6\omega t \dots (2)$$

6. (2)式に求められた係数 $a_0, a_1, b_1, \dots, b_5, a_6$ を代入して 4. と同様にコンピューターシミュレーションする。

以上の手続きにしたがって、身長の発育データを当てはめた。

フーリエ補間による成長曲線の記述

今、一セットの男子身長が発育データがある。

年齢(才)	発育現量値(cm)	年間発育量(cm/yr)
6	115.9	5.8
7	121.7	5.6
8	127.3	5.2
9	132.5	5.0
10	137.5	5.9
11	143.4	7.6
12	151.0	7.8
13	158.8	5.9
14	164.7	2.5
15	167.2	1.4
16	168.6	0.8
17	169.4	

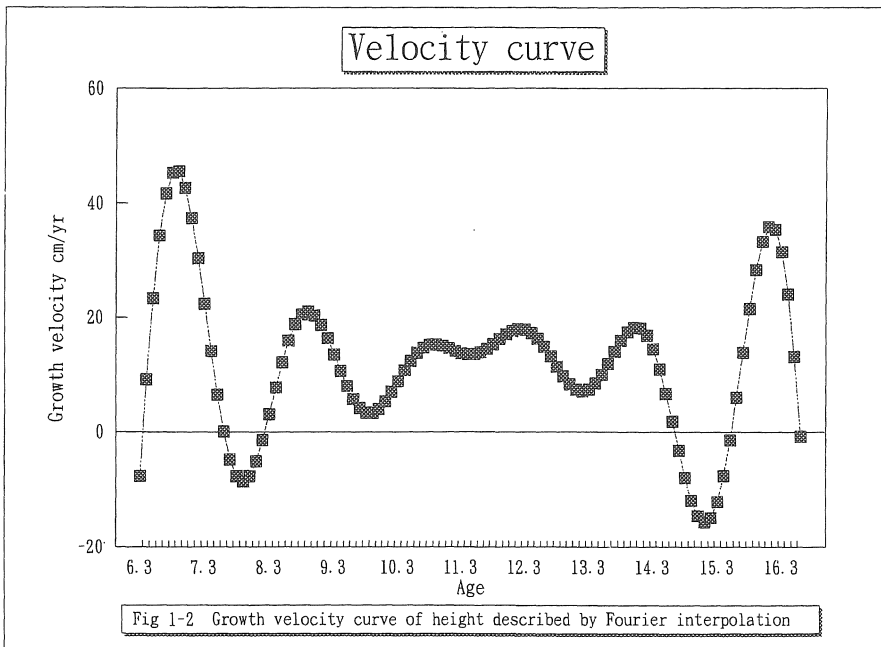
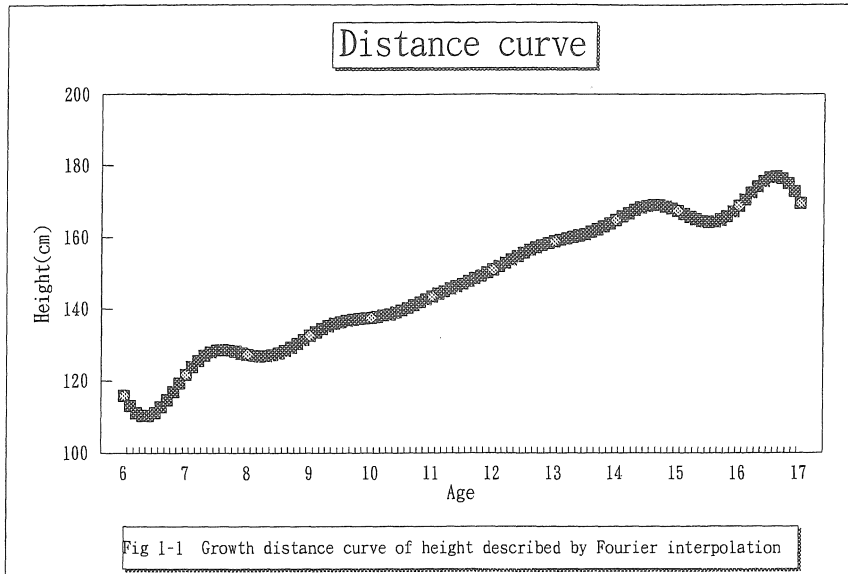
(年間発育量は1年ごとの発育現量値の差分として算出してあり、上段から詰めてある。)

ここに示したデータに対しフーリエ補間を適用した。導かれた係数値を以下に示す。

$$\begin{aligned} a_0 &= 146.5, & a_1 &= 3.556, & b_1 &= -22.114 \\ & & a_2 &= 2.867, & b_2 &= -8.430 \\ & & a_3 &= 4.733, & b_3 &= -4.800 \\ & & a_4 &= 4.700, & b_4 &= -2.887 \\ & & a_5 &= 4.711, & b_5 &= -1.386 \\ & & a_6 &= 2.333, & & \end{aligned}$$

以上の係数を(1), (2)式に代入して算出した結果をコンピューターでグラフ化した。その結果はFig 1に示した。Fig 1-1はフーリエ補間によって描かれた発育現量値の近似曲線で、Fig 1-2はその近似曲線を微分した曲線で、速度曲線として描かれた。

フーリエ補間によって描かれたグラフ(Fig 1)を見るかぎり、発育曲線として実用の可能性は疑問と言えるであろう。現量値曲線で云えば、観測データ点は通過するものの、両端における振動の影響が



かなり中央部まで達している。また、速度曲線について言えば、両端はもとよりかなりの振動が示され、発育学的に考えられている思春期のピークがこの曲線に反映されていない。このように、肉眼から判断してもかなりの問題が生起する。しかし、その客観的な検証については、現在までのところ明確な判断基準が考えられていない。したがって、何を基準に検証すれば良いのか、その点を考察する必要がある。

成長曲線記述に対するフーリエ補間とウェーブレット補間の比較論議

成長曲線当てはめに対する数学的関数の歴史的経緯については、藤井¹⁰⁾の先の報告からその有効性についての論議が展開された。その中で、観測データ点を通過するように構成されている関数とそうではない関数に分類されるが、フーリエ補間もウェーブレット補間も前者に位置づけられる。前者に位置づけられる関数はその他に、スプライン関数、多項式（ラグランジュ補間）が挙げられる。後者に位置づけられる関数はロジスティック関数、ゴンベルツ関数とその代表でダブルロジスティック、トリプルロジスティック、複合ロジスティック関数等があり、最近ではJ P P Sモデルのような複合指数関数等も提唱されている。Hauspie¹¹⁾は前者の関数系を成長曲線モデルに対する構築理論の構成を持たない系とし、後者を構築理論の構成を持つ系とに分けた。

この考え方は、Scammon¹²⁾の提唱した一般型の発育曲線がS字状のカーブを描くことに、ロジスティックのシグモイドを適用させた背景が根強く影響していると考えられる。基本的にロジスティック系の関数は、発育現量値曲線の記述に適用され、その関数を決定するためのパラメーターについて議論されるわけだが、結局は速度曲線の記述が明確に示されていれば解決される議論である。しかし、Hauspie¹¹⁾も指摘しているように、ロジスティック系の関数の微分はmid-growth spurtのような二次的なスパート現象を導けない欠点を持っている。そこで、このような欠点を補う関数系として考えられたのがスプライン関数であるが、周知のように微分が実用にならない。

藤井^{1) 2) 3) 4) 5)}は以上の様な背景からウェーブレット補間法（W I M : Wavelet Interpolation Method）を提唱した。W I Mの最大の有効性は観測

データ点を通過するように構成されていること、微分が無限界可能である点に絞られる。このことは、発育速度の様子が詳細に解析できるわけで、発育現象解明への大きなアプローチとなる。

しかし、ここで問題提起をしたように、W I Mの最大の有効性となる条件だけを考えれば、正にフーリエ補間が浮上するわけである。前項でも述べたように、数学的な説明においてはウェーブレットの有効性は明確であるが、発育学的意味においては、これまで実際のデータで確かめられてはいない。さて、実際のデータで確かめるために、身長の発育データにフーリエ補間を適用したわけであるが、肉眼での判断では客観性に欠ける。そこで、成長曲線に当てはめた場合のフーリエとウェーブレット補間の比較の基準を考える。

現在まで真の成長曲線は不明である。しかし、観測されたデータ点は実在しており、唯一の真実である。さらに、観測データ点を差分により求めた数値は年間発育量として、この数値も真実であり、現に1年間どのぐらい伸びたかは事実として把握されている。そこで、この事実を両補間に対して還元することを考えた。つまり、発育現量値における観測データ点は両補間とも通過できているから、微分された曲線について年間発育量とどの程度差が生じるものか、その点を検討すれば肉眼で判断された結果を客観的に明確化できると考えたわけである。

その方法を以下に示す。

1. フーリエ補間、ウェーブレット補間で、元の発育現量値の近似曲線を微分された数値を1歳の1/10刻みで算出する。
2. 両補間において、算出された数値の1年間分の平均と標準偏差を算出する。（1歳を10等分にしてあるから、1/10刻みにおける数値を10等分について平均し、さらに、標準偏差も算出する。
3. 2.で求めた平均値について、実際に観測された年間発育量の数値と比較する。（Table 1）
4. 標準偏差についてはフーリエとウェーブレット補間の間で比較する。

以上の手続きで導かれた結果が Table 1に示された。明らかにフーリエ補間によって算出された数値は年間発育量とは大きな差が示されている。この結果とは対比的に、ウェーブレット補間では年間発育量との差がほとんど示されていない。また、標準偏

差についても、フーリエの場合は大きいですが、ウェーブレットはそれほど大きくはない。つまり、微分曲線の振動の大きさがフーリエ補間は示されたことになる。

以上のことから、フーリエ、ウェーブレット補間の比較は、肉眼で判断されたように、発育学的な意味においてウェーブレットの実用的な有効性が示さ

れたといえよう。

総括

ウェーブレット解析構築までのプロセスとして、これまではフーリエ解析を発展させるアルゴリズムを数学的に説明することで充分と考えられてきたが、WIMとして成長曲線に適用する立場から考えた場

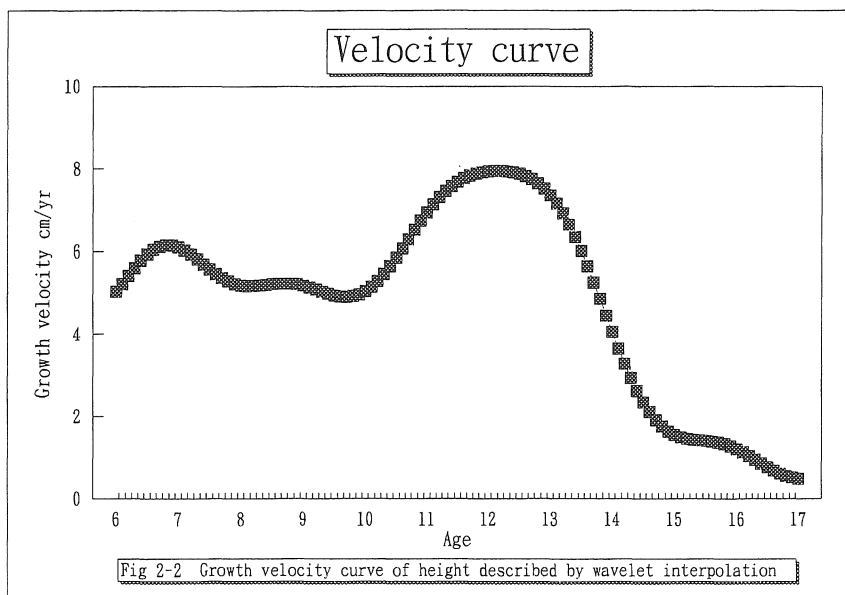
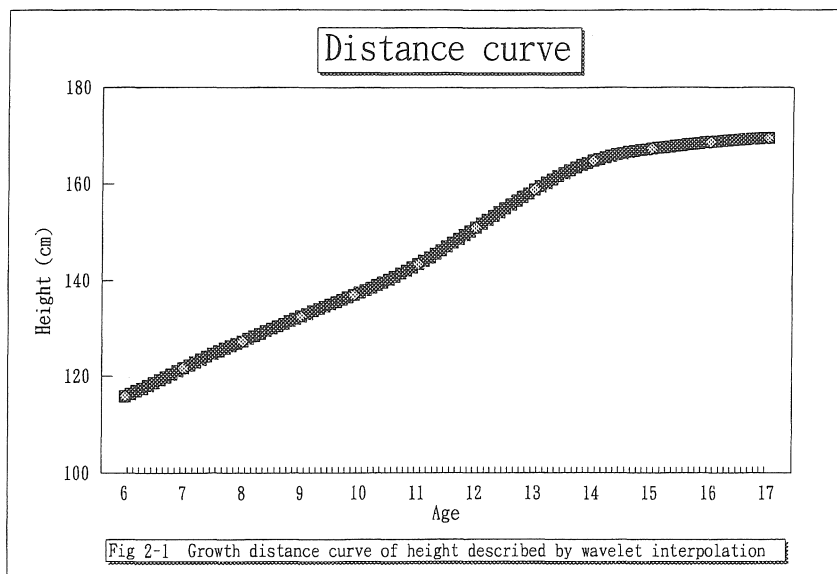


Table 1 Comparison of the first derivative curve between wavelet and Fourier interpolation to growth amount for a year

Age		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Raw data		5.8	5.6	5.2	5.0	5.9	7.6	7.8	5.9	2.5	1.4	0.8	
Fourier	x	5.51	13.26	8.51	10.22	10.70	14.43	15.32	10.79	6.40	0.33	6.60	
	SD	37.96	18.09	10.23	6.17	4.02	0.82	2.80	3.62	10.60	15.38	30.56	
Wavelet	x	5.74	5.65	5.20	5.01	5.81	7.55	7.83	6.06	2.63	1.42	0.84	
	SD	0.39	0.30	0.02	0.09	0.56	0.31	0.14	0.94	0.79	0.08	0.23	

合、補間の意味が発育学的意味を備えているものか、その点の検証はなされなかった。今回の論議はその点を、フーリエ補間という形で実際の発育データに適用することで、ウェーブレット補間との比較を検討した。その結果、明らかにフーリエ補間の発育学的意味における実用性の欠如が指摘された。このことは逆にウェーブレット補間の発育学的意味における有効性を改めて強調する証左といえよう。

また今回、両補間の比較における客観的な基準を導くことができた意義は非常に大きいと考えられる。この基準は補間関数の発育学的意味における検証の判断基準として有効かつ妥当な手法ではないかと考えられよう。

参 考 文 献

- 1) 藤井勝紀・川浪憲一・長谷川泰洋・山本浩：Wavelet 解析による身長発育の時系列分析，発育発達研究，22：21-28，1994.
- 2) 藤井勝紀・山本浩：身長成熟別発育速度曲線の解析，体力科学，44(3)：431-438，1995.
- 3) 藤井勝紀，山本浩：Wavelet Interpolation Method による男子体重発育における P H V の検討，発育発達研究，23：27-34，1995.
- 4) Fujii, K. and Yamamoto, Y. Wavelet Interpolation Method for time series analysis in the growth and development study. Nagoya Journal of Health, Physical Fitness and Sports, 18：13-17，1995.
- 5) 藤井勝紀，川浪憲一：Wavelet 補間法による男子胸囲の発育曲線から導き出される速度曲線および P C V 年齢の検討，学校保健研究，37：450-459，1995.
- 6) Meyer, Y. Ondelettes, Hermann, 1993.
- 7) 守本晃：ウェーブレットを用いた数値計算について，数理科学，NO 30，12：36-43，1992.
- 8) 山田道夫：ウェーブレット変換とは何か，数理科学，NO 30，12：11-17，1992.
- 9) 山口昌哉，畑政義，木上淳：フラクタルの数理，岩波応用数学，1993.
- 10) 藤井勝紀：ウェーブレットによる成長学へのアプローチ - ウェーブレット提唱までの数学的関数の歴史的経緯とその理論的背景に関する論議 - ，愛知工業大学”研究報告” No.32：41-50，1997.
- 11) Hauspie, R. C. : Mathematical models for the study of individual growth patterns. Rev. Epidem. et Sante Publ. 37：461-476，1989.
- 12) Scammon, R. E. : The first serial study of human growth. American Journal of Physical Anthropology. Vol. X, No. 3：329-336，1927.

(受理 平成10年3月20日)