

有損失分布定数型発振器の研究

新 美 吉 彦

Study of the Oscillator with Constant Loss Distributed Line

Yoshihiko NIIMI

Summary — We have studied the oscillator terminated by a Esaki diode with constant distributed line. And particularly, the loss of line will strongly influence the properties of the oscillator. Therefore, we studied in this point particularly detail, and the interesting characters of the oscillator have been discovered.

§ 1. ま え が き

無損失の分布定数線路, i.e. ちえん線路, を非線型抵抗 2 端子素子であるエサキ・ダイオードに接続した発振器については, 既に色々な研究があり, 興味ある結果が, 南雲仁一氏並びに志村正道氏によって発明され, 研究されている。¹⁾ この論文は, 更に一步進めて, そのような分布定数型発振器において, 集中定数と分布定数の両者に抵抗分を含むような, すべてのパラメーターが無視出来ない場合を考え, その場合の電信方程式の一般解, 及び, リアクティブ素子が零に等しくなると双曲型の方程式が Parabolic type (即ち, 熱方程式) に縮退するが, そのような色々な場合について, 整理分類し, かつまた, 種々特殊な非線型境界条件を満たす場合について, 各場合に成立する, 微分-差分 (ヴォルテラ型) 積分方程式を導いて, このような興味ある発振器の特質を完全に把握しようと試みた。以上述べた事項を, 少し詳細に述べると次のようになる。まず, 無歪条件: $\delta [= (1/2) \cdot (G/C - R/L)] = 0$, が成り立つ場合について, 非線型差分-微分方程式を導き, その方程式が互いに独立な 2 個のパラメーター ϵ_L と ϵ_C , 及び回路の特性インピーダンス z_0 , 及び減衰を表わす定数 $\alpha (e^{-\frac{R}{L} 2l})$, によって特長づけられることを示し, 結局, 小さなパラメーターを含む方程式系になることを示した。さらに, 上記の方程式がもう一步縮退した場合: $\epsilon_L = \epsilon_C = 0$, なる場合に成立する差分方程式, (微分項は 0 になる) をグラフィカルな方法によって発振波形を求めた。さらにその他の場合については, 本文にくわしく述べてあるが, その場合成立する方程式は, ヴォルテラ型積分方程式であって, 数値的に求めるか, あるいは他の近似解法による以外には, 一般的には正確な解は求まらない。そこで, 解法として, 1) グラフィカルな方法, 2) 漸近法又は摂動法, 3) 電子計算機による方法, 等が考えられるが, それぞれ特色及び一長一短があり, これらの方法を適当に組合せて用いることによって理論的には, 解の真の姿が把握できるわけである。さらに, 有損失分布線路を用いた場合には, 無損失線路の場合よりも, 安定した, かつ矩形状に近いパルスが得られるので, 上記問題とは, 丁度逆の問題: 必要とするパルスが与えられたとき, そのようなパルスを発生するためにはどんな回路パラメーターを選んだらよいかという, 回路パラメーターの決定法についても考察を加えた。

§ 2. 回路及び回路パラメーター

回路及び回路定数は Fig. 1 に示すような記号を使用した。LCRG すべてについて, 集中パラメーターには “d” という添字をつけた。一方分布パラメーターの方には何にもつけないで表わした。この回路では集中定数回路と分布定数回路とがカスケードに接続され, 1 端にエサキ・ダイオードを接続し, 他端に負荷を接続した状態を考えている。なほ, 今回の報告では, 負荷端子は短絡した状態の場合だけに限って考察した。

記号:

分布定数	単位
L: 単位長当りのインダクタンス,	(ヘンリー/メートル)
C: “ ” のキャパシタンス,	(ファラッド/メートル)
R: “ ” の抵抗,	(オーム/メートル)
G: “ ” の漏洩係数,	(モ- /メートル)

- l : 線路の長さ, (メートル)
- 集中定数
- L_d : インダクタンス, (ヘンリー)
- C_d : キャパシタンス, (ファラッド)
- R_d : 抵抗, (オーム)
- G_d : ダイオードの漏洩コンダクタンス, (モー)
- $f(v_d)$: E.D. の電圧—電流特性, (アンペア)
- E : (E.D. に対する) D.C. バイアス電圧, (ボルト)

猶, 上記の線路定数から導かれる次の諸パラメーターを定義しておこう。(これらは, 後で使用することもあるのでここで定義しておくのである).

$$(2.1) \begin{cases} \mu \equiv (1/2) \cdot (G/C + R/L), & (1/\text{秒}) \\ \delta \equiv (1/2) \cdot (G/C - R/L), & (1/\text{秒}) \\ a^2 \equiv 1/LC : \text{波の伝播速度}, & (\text{メートル}/\text{秒}) \\ l_1 \equiv l/a, & (\text{秒}) \\ z_0 \equiv \sqrt{L/C}, : \text{特性インピーダンス}, & (\text{オーム}) \\ \text{従って,} \\ C = 1/az_0, L = z_0/a. \end{cases}$$

§ 3. 回路方程式及び境界条件

Fig. 1 の回路では, ふつうの電信方程式が成立する :

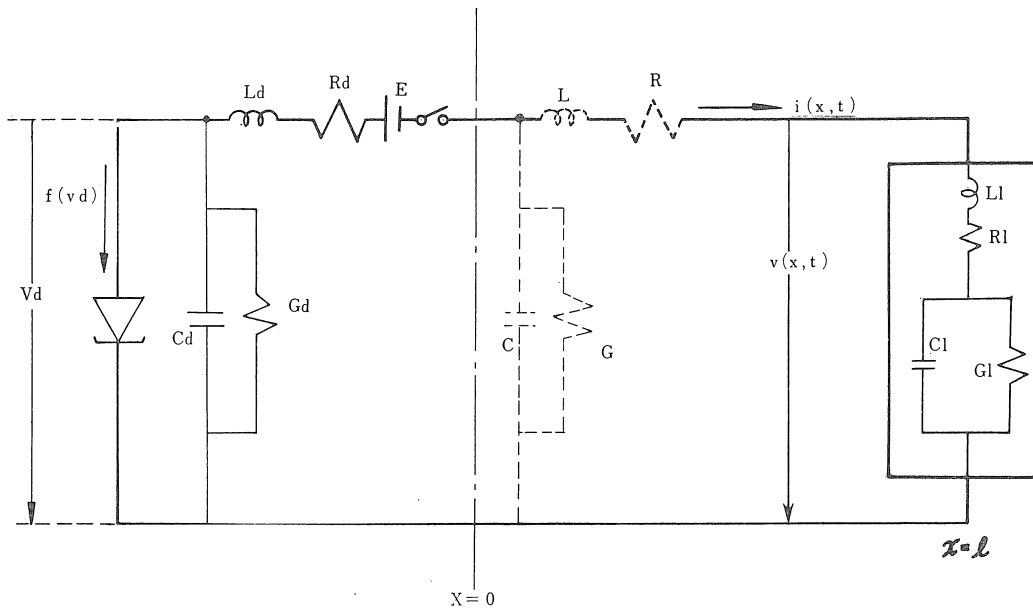


Fig. 1 分布定数型発振器回路

$$(3.1; a) \quad \frac{\partial v}{\partial x} + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + R \cdot i = 0,$$

$$(3.1; b) \quad \frac{\partial i}{\partial x} + C \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + G \cdot v = 0,$$

そこで, 新しい函数 $w(x, t)$ を導入し, $v(x, t), i(x, t)$ を $w(x, t)$ によって次のように定義する :

$$(3.2; a) \quad v(x, t) \equiv \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$(3.2; b) \quad i(x, t) \equiv -C \cdot \frac{\partial w}{\partial t} - Gw,$$

このように置くと, (3.1; b) 式は自然に満足され, (3.1; a) から次式が得られる.

$$(3.3; a) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - LC \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (RC + GL) \frac{\partial w}{\partial t} - RGw = 0$$

またわ, (2.1) のパラメーターを使うと,

$$(3.3; b) \quad a^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\mu \frac{\partial w}{\partial t} - (\mu^2 - \delta^2)w = 0, \quad (L \neq 0, C \neq 0)$$

或いは, (3.2; a 及び b) とは dual (adjoint) な次の変換を用いても同じ式が得られる:

$$(3.4; a) \quad v(x, t) \equiv -L \cdot \frac{\partial w}{\partial t} - R \cdot w,$$

$$(3.4; b) \quad i(x, t) \equiv \frac{\partial w}{\partial x},$$

この場合には, (3.1; a) 式は自然に満足され, (3.1; b) 式から (3.3) 式が導かれる. 或いはさらに, (3.2) と (3.4) の一次結合式を用いてもよい. ここから先の取扱いは, 次節の分類の各々の場合によって異なってくる.

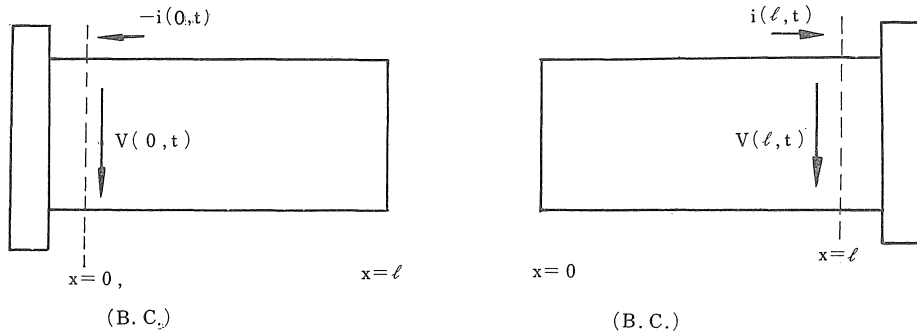


Fig. 2 境界条件の2つのタイプ

次に, 境界条件を, Fig. 2 のごとく, 2つの場合にわけて考えた: すなわち, (B.C.) と, $\overline{(B.C.)}$ である. これらは全く同じ回路をただ, $x=0$ の位置と $x=l$ の位置とを入れ換えただけである. がしかし, 方程式を導く過程においては, 便利な方を採用すると大変都合がよい. それぞれの場合に成立する境界条件は:

(B.C.) の場合:

$x=0$ で,

$$(3.5; 1) \quad -i(0, t) = f(v_d) + G_d v_d + C_d \cdot \frac{dv_d}{dt},$$

$$(3.5; 2) \quad v(0, t) = v_d - E - R_d \cdot i(0, t) - L_d \cdot \frac{di(0, t)}{dt},$$

$x=l$ で,

$$(3.5; 3) \quad v(l, t) = 0,$$

又, $\overline{(B.C.)}$ の場合:

$x=0$ で,

$$(3.5; 3) \quad v(0, t) = 0,$$

$x=l$ で,

$$(3.5; 1) \quad i(l, t) = f(v_d) + G_d \cdot v_d + C_d \cdot \frac{dv_d}{dt},$$

$$(3.5; 2) \quad v(l, t) = v_d - E + R_d \cdot i(l, t) + L_d \cdot \frac{di(l, t)}{dt},$$

となる.

§ 4. 分類; それぞれの場合に成り立つ方程式の種類,

まず, 回路の性質に, 特にパルス特性に, 一番大きく影響するのはリアクティブな素子 (i.e., パラメーター) である. それは又, 回路の方程式のタイプをも決定してしまう. そこで次の形のマトリックスを考える:

$$(4.1) \begin{bmatrix} L & L_d \\ C & C_d \end{bmatrix}_X \quad \text{及び} \quad \begin{bmatrix} R & R_d \\ G & G_d \end{bmatrix}_R$$

そして、その要素が零または有限であるかによって0またはF(あるいは、L.C.R.G.等とも書いた)と書くことにする。先ず、リアクティブな要素及び無歪パラメータ δ が0あるいは有限であるかによってFig. 3に示すように20通りに分類して考えることにした。図中の※はこの中で特に注目すべき場合であり、そのほかの場合は丁度注目すべき場合の中間に位置する場合と考えられる。この表によって示された場合、及びそれらの個々の場合のさらに特殊な場合、すなわち抵抗分が色々な値をもつ場合について検討を加えた。又Fig. 3にも書かれているが、それぞれの場合を記号的に(1,3d)等と示すことにした。ここで最初の記号は分布パラメータの各分類分けを示し、第2番目の番号は集中パラメータの各分類分けを示している。抵抗分についても、全く同様な記号を用いて分類した。従って、[(1,3d; δ)_X, (2,1d)_R]などと書けば、完全に回路パラメータが決定したことになる。

§ 5. それぞれの場合に成立する連立非線型微分—差分—積分方程式の誘導並びにその解。

5.1. (1, 1_d), (1, 2_d), (1, 3_d), (1, 4_d) の場合：
(L=C=0).

この場合、(3.1; a), 及び (3.1; b) の微分方程式系は次のようになる：

$$(5.1; 1) \quad \frac{\partial v}{\partial x} + R \cdot i = 0, \quad \frac{\partial i}{\partial x} + G \cdot v = 0,$$

さらに、(3.2; a) 及び (3.2; b) の変数変換は：

$$(5.1; 2) \quad v(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad i(x, t) = -Gw,$$

となる。したがって、(3.3; a) 式に相当する偏微分方程式は次のようになる：

$$(5.1; 3) \quad \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - RG \cdot w = 0,$$

(5.1; 3) 式の一般解は：

$$(5.1; 4) \quad w(x, t) = A(t) \cdot e^{\alpha x} + B(t) \cdot e^{-\alpha x},$$

ただし、

$$(5.1; 5) \quad \alpha \equiv \sqrt{RG},$$

従って、変換 (5.1; 2) 式とあわせ考えれば、次の一般解 $v(x, t)$, $i(x, t)$ が得られる：

$$(5.1; 6a) \quad v(x, t) = \alpha A \cdot e^{\alpha x} - \alpha B \cdot e^{-\alpha x},$$

$$(5.1; 6b) \quad i(x, t) = -G(A \cdot e^{\alpha x} + B \cdot e^{-\alpha x}),$$

$$(5.1; 7a) \quad v(0, t) = \alpha A - \alpha B,$$

$$(5.1; 7b) \quad i(0, t) = -G(A + B),$$

$$(5.1; 7c) \quad v(l, t) = \alpha(A \cdot e^{\alpha l} - B \cdot e^{-\alpha l}),$$

境界条件 (B.C.) (3.5; 3) より：

$$(5.1; 8) \quad B \equiv A e^{2\alpha l},$$

これと、(5.1; 7) より：

$$(5.1; 9a) \quad v(0, t) = \alpha A(t) \cdot (1 - e^{2\alpha l}),$$

1	※ $\begin{bmatrix} 0 & F \\ C & C_d \end{bmatrix}_X$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & G_d \end{bmatrix}_R$	$\begin{bmatrix} 0 & F \\ G & G_d \end{bmatrix}_R$	※ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
	微分・	微分・	微分・	代数・
	(1, 1d)	(1, 2d)	(1, 3d)	(1, 4d)
2	※ $\begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}_X$	$\begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}_R$	$\begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_R$	※ $\begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
	微分・積分	微・積分	微・積	積・代
	(2, 1d)	(2, 2d)	(2, 3d)	(2, 4d)
3	※ $\begin{bmatrix} 0 & F \\ F & F \end{bmatrix}_X$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F & F \end{bmatrix}_R$	$\begin{bmatrix} 0 & F \\ F & 0 \end{bmatrix}_R$	※ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{bmatrix}$
	微分・積	微・積	微・積	積分・代
	(3, 1d)	(3, 2d)	(3, 3d)	(3, 4d)
4 $\delta \neq 0$	※ $\begin{bmatrix} F & F \\ F & F \end{bmatrix}_X$	$\begin{bmatrix} F & 0 \\ F & F \end{bmatrix}_R$	$\begin{bmatrix} F & F \\ F & 0 \end{bmatrix}_R$	※ $\begin{bmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{bmatrix}$
	微・差・積	微・差・積	微・差・積	微・差・積
	(4, 1d)	(4, 2d)	(4, 3d)	(4, 4d)
4 $\delta = 0$	※上に同じ	上に同じ	上に同じ	※上に同じ
	微・差	微・差	微・差	差
	(4, 1d; δ)	(4, 2d, δ)	(" δ)	(4, 4d, δ)

Fig. 3

(5.1; 9b) $i(0,t) = -G(1+e^{2\alpha l}) \cdot A(t)$,

結局, (1,1_d) の場合 (この他の場合は, この結果から容易に導かれる), 次の微分方程式が成立つことになる。

(5.1; 10a) $C_d \cdot \frac{dv_d}{dt} = -G_d \cdot v_d - f(v_d) + \tilde{A}$,

(5.1; 10b) $L_d \cdot \frac{d\tilde{A}}{dt} = (E - v_d) + \beta \tilde{A}$,

ここで, \tilde{A} , β は次のような定数である:

(5.1; 11)
$$\begin{cases} \tilde{A} \equiv G(1+e^{2\alpha l}) \cdot A(t), \\ \beta = \sqrt{\frac{R}{G}} \cdot \frac{1-e^{2\alpha l}}{1+e^{2\alpha l}} - R_d, \end{cases}$$

結局, この場合には, Fig. 4 において, 集中負荷 G_L を, その代りに分布定数負荷で置き換えたものと等化であることがわかる。

ここで一言附加しておきたいことは, 或は全く簡単に導かれるので省略するが, (1, 2_d) の場合と, (1, 3_d) (i.e., $C_d=0$, $L_d \neq 0$) の場合とを比較してみると, (1, 3_d) のときには微分項の前に非直線項が現われるので, (1, 2_d) よりずっと波形がパルス状になることである。即ち, この場合から推測して, インダクタンスの存在は波形を鋭く鋭角にし, キャパシタンスの存在は波形を拡がったものにする。したがって, 狭いパルスを生じさせるためにはインダクタンスを大きくし, キャパシタンスを小さくするとよく, 逆に, 巾の広いパルスを生じさせるためには, 上記とは逆の値を選ぶとよいであろう。

最後に, (1, 4_d) の場合には:

(5.1; 12) $-G_d \cdot v_d + \beta^{-1}(v_d - E) = f(v_d)$,

従って, この場合 (状態) には自励振動を起さないが, 強制振動回路としては非常に興味ある回路と考えられる。

次に, 2., 3. の場合を示すのが順序であるが, 先ず, 最後の場合: 4., をはじめに説明しよう。

5. 2. (4.1_d), (4.2_d), (4.3_d), (4.4_d) の場合:

ここで, 方程式 (3.3; a), (3.3; b) に立ち返って再出発する。そこで, 変数変換: $w \rightarrow u$,

(5.2; 1) $w(x, t) \equiv e^{-\mu t} \cdot u(x, t)$

を w に行うと, (3.3; b) は $u(x, t)$ によって:

(5.2; 2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta^2 u$,

と変形される。結局, この場合には, (5.2; 2) 式から $u(x, t)$ を求め, これを (5.2; 1) に代入して $w(x, t)$ を求め, これからさらに, (3.2; a), (3.2; b) によって $v(x, t)$, $i(x, t)$ を求めればよい。先ず,

5. 2. 1. $i(x, t)$, $v(x, t)$ の導出,

次の変数変換を行う:

(5.2; 3) $x_1 \equiv x/a$ (=時間のディメンジョン)

を行うと, (5.2; 2) 式は:

(5.2; 4) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \delta^2 u$,

となる。この式を, 区間 $0 \leq x \leq l$, の上で, 同次初期条件:

(5.2; 5) $u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0,$

のもとに解かう。そうすると, 函数 $I(\delta\sqrt{t^2-x_1^2})$, が (5.2; 4) の解となる (証明略)。

すなわち, これが基本解として役立つのである。ここで, $I(z)$ はベッセル函数と関係があり, 次式によって定義され

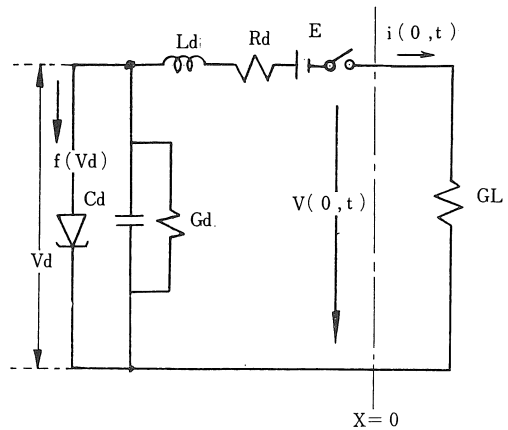


Fig. 4

る特殊函数である。

$$(5.2; 6) \quad I(z) \equiv J_0(iz)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s!)^2} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2s} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{2s i n \theta} d\theta \\ &= 1 + \frac{1}{4} z^2 + \frac{1}{64} z^4 + \dots, \quad (i = \sqrt{-1}). \end{aligned}$$

従って、

$$\int_0^{t-x_1} \psi(\tau) I(\delta \sqrt{(t-\tau)^2 - x_1^2}) d\tau,$$

及び、

$$\int_0^{t-(l_1-x_1)} \varphi(\tau) I(\delta \sqrt{(t-\tau)^2 - (l_1-x_1)^2}) d\tau,$$

も解となる。さらに、これらを微分したものも又解となる。何政なら、我々がここで取扱っている方程式は、いずれも線形の偏微分方程式であるからである。ただし、ここで、 $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ は任意函数で、初期及び境界条件から決定されるべきものである。又、 $\tau < 0$ のとき、 $\varphi(\tau) = \psi(\tau) = 0$ と仮定する。すなわち、

$$(5.2; 4) \quad \text{の解を次のかたちであると仮定する；}$$

すなわちそのようなかたちの解を求める：

$$(5.2; 7a) \quad u(x_1, t) = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{t-x_1} \varphi(\tau) I(\delta \sqrt{(t-\tau)^2 - x_1^2}) d\tau + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{t-(l_1-x_1)} \psi(\tau) \cdot I(\delta \sqrt{(t-\tau)^2 - (l_1-x_1)^2}) d\tau,$$

またわ、書き換えて；

$$(5.2; 7b) \quad u(x_1, t) = -\varphi(t-x_1) - \int_0^{t-x_1} \frac{\varphi(\tau) \cdot \delta x_1 \cdot I'(\delta \sqrt{(t-\tau)^2 - x_1^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - x_1^2}} d\tau + \psi(t-l_1+x_1) + \int_0^{t-l_1+x_1} \frac{\psi(\tau) \cdot \delta(l_1-x_1) \cdot I'(\delta \sqrt{(t-\tau)^2 - (l_1-x_1)^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (l_1-x_1)^2}} d\tau,$$

そこで、次のように函数変換する：

$$(5.2; 8) \quad \begin{cases} w(x_1, t) \equiv e^{-\mu t} \cdot u(x_1, t), \\ y_1(t) \equiv e^{-\mu t} \cdot \varphi(t), \\ y_2(t) \equiv e^{-\mu t} \cdot \psi(t), \end{cases}$$

そうすると、

$$(5.2; 9) \quad \begin{cases} e^{-\mu t} \cdot \varphi(t-x_1) = e^{-\mu x_1} \cdot y_1(t-x_1), \\ e^{-\mu t} \cdot \psi(t-x_1) = e^{-\mu x_1} \cdot y_2(t-x_1), \end{cases}$$

と書くことが出来ることから、(5.2; 7b) 式は次のようになる：

$$(5.2; 10) \quad w(x_1, t) = -e^{-\mu x_1} \cdot y_1(t-x_1) - \int_0^{t-x_1} y_1(\tau) \cdot \frac{\delta x_1 \cdot e^{-\mu(t-\tau)}}{\sqrt{(t-\tau)^2 - x_1^2}} \cdot I'(\delta \sqrt{(t-\tau)^2 - x_1^2}) d\tau + e^{-\mu(l_1-x_1)} \cdot y_2(t-l_1+x_1) + \int_0^{t-(l_1-x_1)} y_2(\tau) \cdot \frac{\delta(l_1-x_1) \cdot e^{-\mu(t-\tau)}}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (l_1-x_1)^2}} \cdot I'(\delta \sqrt{(t-\tau)^2 - (l_1-x_1)^2}) \cdot d\tau$$

又、

$$(5.2; 11a) \quad v(x_1, t) = \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x_1},$$

$$(5.2; 11b) \quad i(x_1, t) = -C \cdot \frac{\partial w}{\partial t} - G \cdot w,$$

となる。結局、(5.2; 10) 式の w を (5.2; 11a), (5.2; 11b) に代入すれば、 $i(x_1, t)$, $v(x_1, t)$ の一般解が求められる。以下に計算順序の概略と、結果を示さう：

先ず,

$$v(x_1, t) \equiv \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{1}{a} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_1} (e^{-\mu x_1} \cdot y_1(t-x_1)) - \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{t-x_1} y_1(\tau) \cdots d\tau \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_1} (e^{-\mu(l_1-x_1)} \cdot y_2(t-l_1+x_1)) - \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{t-l_1+x_1} y_2(\tau) \cdots d\tau \right\},$$

ここで, $\frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{t-x_1} y_1(\tau) \cdots d\tau$, 及び $\frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{t-l_1+x_1} y_2(\tau) \cdots d\tau$, を附録の公式を参照して計算すると, 次のようになる:

先ず,

$$(5.2; 12) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{t-x_1} y_1(\tau) \cdot \frac{\delta x_1 \cdot e^{-\mu(t-\tau)} I'(\delta \sqrt{(t-\tau)^2 - x_1^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - x_1^2}} d\tau, \\ = -\frac{\delta^2 x_1}{2} \cdot e^{-\mu x_1} \cdot y_1(t-x_1) + \int_0^{t-x_1} y_1(\tau) \cdot \frac{1}{\xi^2} \cdot \delta^4 \cdot e^{-\mu(t-\tau)} \cdot [(t-\tau)^2 I'(\xi) - x_1^2 \xi I''(\xi)] d\tau,$$

ただし,

$$(5.2; 12a) \quad \xi \equiv \delta \sqrt{(t-\tau)^2 - x_1^2},$$

又,

$$(5.2; 13) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{t-(l_1-x_1)} y_2(\tau) \cdot \frac{\delta(l_1-x_1) \cdot e^{-\mu(t-\tau)} \cdot I'(\delta \sqrt{(t-\tau)^2 - (l_1-x_1)^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (l_1-x_1)^2}} d\tau \\ = \frac{\delta^2(l_1-x_1)}{2} \cdot e^{-\mu(l_1-x_1)} \cdot y_2(t-l_1+x_1) - \int_0^{t-(l_1-x_1)} y_2(\tau) \cdot \frac{1}{\eta^2} \cdot \delta^4 \cdot e^{-\mu(t-\tau)} \cdot [(t-\tau)^2 I'(\eta) - \\ -(l_1-x_1)^2 \cdot \eta \cdot I''(\eta)] d\tau$$

ただし,

$$(5.2; 13a) \quad \eta \equiv \delta \sqrt{(t-\tau)^2 - (l_1-x_1)^2},$$

となる。そこで, これらを用いて, 計算し, 整理すると, 結果として $v(x_1, t)$ は次のようになる:

$$(5.2; 14) \quad v(x_1, t) = -\frac{1}{a} \left\{ \left(\mu + \frac{\delta^2 x_1}{2} \right) \cdot e^{-\mu x_1} \cdot y_1(t-x_1) + e^{-\mu x_1} \cdot y_1'(t-x_1) - \int_0^{t-x_1} y_1(\tau) \cdot \frac{1}{\xi^2} \cdot \delta^4 \cdot e^{-\mu(t-\tau)} \cdot \right. \\ \left. \cdot [(t-\tau)^2 I'(\xi) - x_1^2 \cdot \xi \cdot I''(\xi)] \cdot d\tau + \left(\mu + \frac{\delta^2(l_1-x_1)}{2} \right) \cdot e^{-\mu(l_1-x_1)} \cdot y_2(t-l_1+x_1) + e^{-\mu(l_1-x_1)} \cdot \right. \\ \left. \cdot y_2'(t-l_1+x_1) - \int_0^{t-l_1+x_1} y_2(\tau) \cdot \frac{1}{\eta^2} \cdot \delta^4 \cdot e^{-\mu(t-\tau)} \cdot [(t-\tau)^2 I'(\eta) - (l_1-x_1)^2 \cdot \eta \cdot I''(\eta)] d\tau \right\} \\ (\xi = \delta \sqrt{(t-\tau)^2 - x_1^2}, \quad \eta = \delta \sqrt{(t-\tau)^2 - (l_1-x_1)^2})$$

となる。又, 同様にして, $i(x_1, t)$ を求める。先ず:

$$(5.2; 15) \quad i(x_1, t) \equiv -C \cdot \frac{\partial w}{\partial t} - Gw \\ = -C \left\{ -e^{-\mu x_1} \cdot y_1'(t-x_1) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t-x_1} y_1(\tau) \cdots d\tau + e^{-\mu(l_1-x_1)} \cdot y_2'(t-l_1+x_1) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t-(l_1-x_1)} y_2(\tau) \cdots d\tau \right\} \\ - G \left\{ -e^{-\mu x_1} \cdot y_1(t-x_1) - \int_0^{t-x_1} y_1(\tau) \cdots d\tau + e^{-\mu(l_1-x_1)} \cdot y_2(t-l_1+x_1) + \int_0^{t-(l_1-x_1)} y_2(\tau) \cdots d\tau \right\},$$

ここで, 又 $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t-x_1} y_1(\tau) \cdots d\tau$, $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t-(l_1-x_1)} y_2(\tau) \cdots d\tau$ を(附2)を用いて計算し, それを代入して, 上式を整理すると,

結果として次のような $i(x_1, t)$ の表現式が得られる。すなわち,

$$(5.2; 16) \quad i(x_1, t) = C \cdot e^{-\mu x_1} \cdot y_1'(t-x_1) + (G+C \cdot \frac{\delta^2 x_1}{2}) \cdot e^{-\mu x_1} \cdot y_1(t-x_1) + \int_0^{t-x_1} y_1(\tau) \cdot \left\{ \frac{G}{\xi} \delta^2 x_1 \cdot e^{-\mu(t-\tau)} \cdot I'(\xi) + \right. \\ \left. + \frac{C}{\xi^2} \cdot \delta^4 \cdot x_1 \cdot e^{-\mu(t-\tau)} \cdot [(-\mu(t-\tau)^2 + \mu x_1^2 - (t-\tau)) \cdot I'(\xi) + (t-\tau) \cdot \xi I''(\xi)] \right\} d\tau - C \cdot e^{-\mu(l_1-x_1)} \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot y_2'(t-l+x_1) - (G+C \cdot \frac{\delta^2(l_1-x_1)}{2}) \cdot e^{-\mu(l_1-x_1)} y_2(t-l_1+x_1) - \int_0^{t-l_1+x_1} y_2(\tau) \cdot \left\{ \frac{G}{\eta} \cdot \delta^2(l_1-x_1) \cdot \right. \\ & \left. \cdot e^{-\mu(t-\tau)} I'(\eta) + \frac{C}{\eta^3} \cdot \delta^4(l_1-x_1) \cdot e^{-\mu(t-\tau)} \cdot [(-\mu(t-\tau)^2 + \mu(l_1-x_1)^2 - (t-\tau)] \cdot I_1(\eta) + (t-\tau)\eta I''(\eta) \right\} d\tau, \end{aligned}$$

ただし, $\xi = \delta\sqrt{(t-\tau)^2 - x_1^2}$, $\eta = \delta\sqrt{(t-\tau)^2 - (l_1-x_1)^2}$

ここに得られた $v(x_1, t)$, $i(x_1, t)$ の式は非常に一般的な式であって, 任意函数 $y_1(t)$, $y_2(t)$ 及び, その微係数と積分によって表わされている. 従って, 任意の初期境界値問題に適用することが出来る.

5. 2. 2. 一般の場合に成立する連立非線型差分-微分のヴォルテラ型積分方程式,

先ず, $v(0, t)$, $v(l, t)$, 及び $i(0, t)$ を計算しよう. それには, (5.2; 14) 及び (5.2; 16) 式から:

$$(5.2; 17) \quad v(0, t) = \frac{1}{a} \left\{ \mu \cdot y_1(t) + y_1'(t) - \int_0^t y_1(\tau) \cdot K_2(t-\tau) d\tau + \left(\mu + \frac{\delta^2 l_1}{2} \right) \cdot e^{-\mu l_1} \cdot y_2(t-l_1) + e^{-\mu l_1} \cdot y_2'(t-l_2) \right. \\ \left. - \int_0^{t-l_1} y_2(\tau) \cdot K_1(t-\tau) d\tau \right\};$$

$$(5.2; 18) \quad v(l_1, t) = \frac{1}{a} \left\{ \left(\mu + \frac{\delta^2 l_1}{2} \right) \cdot e^{-\mu l_1} \cdot y_1(t-l_1) + e^{-\mu l_1} \cdot y_1'(t-l_1) + \int_0^{t-l_1} y_1(\tau) \cdot K_1(t-\tau) d\tau + \mu \cdot y_2(t) + \right. \\ \left. + y_2'(t) + \int_0^t y_2(\tau) \cdot K_2(t-\tau) d\tau \right\}; \quad (\equiv v[t; y_1, y_2])$$

$$(5.2; 19) \quad i(0, t) = C \cdot y_1'(t) + G \cdot y_1(t) - C \cdot e^{-\mu l_1} \cdot y_2'(t-l_1) - \left(G + C \cdot \frac{\delta^2 l_1}{2} \right) \cdot e^{-\mu l_1} \cdot y_2(t-l_1) - \\ - \int_0^{t-l_1} y_2(\tau) \cdot \{ C \cdot K_3(t-\tau) + GK_4[t-\tau] \} \cdot d\tau;$$

ここで, $K_1(z)$, $K_2(z)$, $K_3(z)$, $K_4(z)$ は, 次式によって定義される函数である:

$$(5.2; 20) \quad K_1(z) \equiv \frac{\delta^4 \cdot e^{-\mu z} \cdot [z^2 I'(\delta\sqrt{z^2 - l_1^2}) - l_1^2 \cdot \delta \cdot \sqrt{z^2 - l_1^2} \cdot I''(\delta\sqrt{z^2 - l_1^2})]}{\delta^3 \cdot (z^2 - l_1^2)^{3/2}}, \\ K_2(z) \equiv \frac{\delta^4 \cdot e^{-\mu z} \cdot z^2 \cdot I'(\delta z)}{\delta^3 z^3}, \\ K_3(z) \equiv \frac{\delta^4 l_1 \cdot e^{-\mu z} \cdot [-(\mu z^2 - \mu l_1^2 + z) I'(\delta\sqrt{z^2 - l_1^2}) + z \delta \sqrt{z^2 - l_1^2} \cdot I''(\delta\sqrt{z^2 - l_1^2})]}{\delta^3 (z^2 - l_1^2)^{3/2}}, \\ K_4(z) \equiv \frac{\delta^2 l_1 e^{-\mu z} I'(\delta\sqrt{z^2 - l_1^2})}{\delta \sqrt{z^2 - l_1^2}},$$

そこで, 境界条件, (3.5; 1)~(3.5; 3) を用いることにより, 次の方程式が導かれる: 先ず

$$(5.2; 21) \quad C_d \cdot \frac{dv_d}{dt} = -G_d \cdot v_d - f(v_d) - i(0, t),$$

又, (3.5; 2) より:

$$(5.2; 22) \quad L_d \cdot \frac{d}{dt} i(0, t) = (E - v_d) + R_d \cdot i(0, t) + v(0, t); \quad (3.5; 1) \text{ に } v(l_1, t) \text{ を代入すると:}$$

$$(5.2; 23) \quad \frac{d}{dt} y_2(t) = -e^{-\mu l_1} \cdot y_1'(t-l_1) - \left(\mu + \frac{\delta^2 l_1}{2} \right) \cdot e^{-\mu l_1} \cdot y_1(t-l_1) + \\ + \int_0^{t-l_1} y_1(\tau) \cdot K_1(t-\tau) d\tau - \mu y_2(t) + \int_0^t y_2(\tau) \cdot K_2(t-\tau) d\tau;$$

又,

$$(5.2; 24) \quad \frac{d}{dt} y_1(t) = \frac{1}{C} i(0, t) - \frac{G}{C} y_1(t) + e^{-\mu l_1} \cdot y_2'(t-l_1) + \left(\frac{G}{C} + \frac{\delta^2 l_1}{2} \right) \cdot e^{-\mu l_1} \cdot y_2(t-l_1) + \\ + \int_0^{t-l_1} y_2(\tau) \cdot \{ K_3(t-\tau) + \frac{G}{C} K_4(t-\tau) \} d\tau,$$

さらに,

$$(5.2; 25) \quad L_d \cdot \frac{d}{di} i(0, t) = (E - v_d) + (R_d + z_0) \cdot i(0, t) + \frac{1}{a} \delta \cdot y_1(t) - \frac{1}{a} \int_0^{t-l_1} y_1(\tau) \cdot K_2(t-\tau) \cdot d\tau + \\ + \frac{2}{a} \cdot e^{-\mu l_1} \cdot y_2'(t-l_1) + \frac{1}{a} \left(\frac{G}{C} + \mu + \delta^2 l_1 \right) \cdot e^{-\mu l_1} \cdot y_2(t-l_1) +$$

$$+\frac{1}{a}\int_0^{t-l_1}y_2(\tau)\cdot[K_3(t-\tau)+\frac{G}{C}K_4(t-\tau)-K_1(t-\tau)]d\tau$$

結局, $v_d(t)$, $i(0, t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ を未知函数として, (5.2; 22), (5.2; 23), (5.2; 24), (5.2; 25) を連立させ, 適当な初期条件のもとに, これらの方程式系を解けば, 求めんとする解が得られることになる。

5. 2. 3. 集中定数をすべて無視し (すなわち,

集中素子としては E.D. のみ), 分布パラメーターのみを考慮した場合の非線型差分—微分の積分方程式系

5. 2. 3. 1. 非線型差分—微分—積分方程式系

今, 集中パラメーターとして, E と $f(v_d)$ のみを残し, 他のすべての定数を 0 を等しいとおくと, 結局, 次の方程式系が得られる:

$$(5.2; 26) \quad \dot{y}_1(t) = -\frac{1}{C}f(v_d) - (\mu + \delta) \cdot y_1(t) + B \cdot y_2'(t-l_1) + (\delta + A) \cdot B \cdot y_2(t-l_1) + \\ + \int_0^{t-l_1} y_2(\tau) \cdot K_3(t-\tau) \cdot d\tau + (\mu + \delta) \int_0^{t-l_1} y_2(\tau) \cdot K_4(t-\tau) d\tau,$$

$$(5.2; 27) \quad \dot{y}_2(t) = -A \cdot B \cdot y_1'(t-l_1) - B \cdot y_1(t-l_1) \\ + \int_0^{t-l_1} y_1(\tau) \cdot K_1(t-\tau) \cdot d\tau - \mu \cdot y_2(t) + \int_0^t y_2(\tau) \cdot K_2(t-\tau) \cdot d\tau,$$

$$(5.2; 28) \quad a(v_d - E) = y_1'(t) + \mu y_1(t) - \int_0^t y_1(\tau) \cdot K_2(t-\tau) d\tau + A \cdot B \cdot y_2'(t-l_1) + B \cdot y_2(t-l_1) - \\ - \int_0^{t-l_1} y_2(\tau) \cdot K_1(t-\tau) d\tau;$$

ただし, ここで A, B は:

$$(5.2; 29) \quad \begin{cases} A \equiv \mu + \frac{\delta^2 l_1}{2}, & B \equiv e^{-\mu l_1}, \\ \dot{y}_i \equiv dy_i/dt. \end{cases}$$

である。これらの方程式を連立させて解を求めればよいわけであるが, 一般的には, これを解くことは, 解析的にも, 数値的にもむずかしいことであると思われる。そこで, 次のような, 近似式を導いておく。

5. 2. 3. 2. 近似差分—微分方程式。

今, $K_i(z)$ はすべて解析函数であると仮定すると:

$$(5.2; 30) \quad \begin{cases} K_1(z) = K_{10} + K_{11} \cdot z + \dots, \\ K_2(z) = K_{20} + K_{21} \cdot z + \dots, \\ K_3(z) + (\mu + \delta)K_4(z) = K_{30} + K_{31} \cdot z + \dots, \end{cases}$$

とすべての $z \in C$ に対して書くことが出来る。(ここに C は複素数体)そこで, 次の公式:

$$(5.2; 31) \quad {}_c D_t^{-n} y(x) \equiv \int_c^t d\tau \int_c^\tau d\tau \dots \int_c^\tau y(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_c^t (t-\tau)^{n-1} y(\tau) \cdot d\tau, \quad (\Gamma(z) \text{ はガンマ函数})$$

なる公式を用いると,

$$(5.2; 32) \quad \int_0^t [K_{i0} + K_{i1}(t-\tau) + \dots] y(\tau) d\tau = K_{i0} \cdot D_t^{-1} y + K_{i1} \cdot D_t^{-2} y + \dots$$

となる。そこでこの公式を用いて, 更に, 一番粗い近似として, 展開の定数 $K_{i0} (i=1, 2, 3, 4)$ のみを用いるとする。そうして得られた式を微分すると, $y_1''(t)$, $y_2''(t)$, $v_d'(t)$ についての 3 個の方程式が得られることになる。すなわち, 結局:

$$(5.2; 33) \quad y_1''(t) = -\frac{1}{1+z_0 \cdot g(v_d)} \cdot \{(\mu + \delta + \mu z_0 g(v_d)) \cdot y_1'(t) - \frac{\delta^2}{2} z_0 \cdot g(v_d) \cdot y_1(t) \\ - e^{-\mu l_1} \cdot (1 + z_0 g(v_d)) \cdot y_2''(t-l_1) - [e^{-\mu l_1} \cdot (\delta + \mu + \frac{\delta^2 l_1}{2}) - (\mu + \frac{\delta^2 l_1}{2})] z_0 g(v_d) \cdot y_2'(t-l_1) \\ - (\frac{\delta^3 l_1}{2} + \frac{\delta^2}{2} z_0 g(v_d)) \cdot y_2(t-l_1)\},$$

$$(5.2; 34) \quad y_2''(t) = -e^{-\mu l_1} \cdot y_1''(t-l_1) - (\mu + \frac{\delta^2 l_1}{2}) \cdot e^{-\mu l_1} \cdot y_1'(t-l_1) + \frac{\delta^2}{2} \cdot y_1(t-l_1) - \mu \cdot y_2'(t) + \frac{\delta^2}{2} \cdot y_2(t),$$

$$(5.2; 36) \quad v_d' = -\frac{l_1}{l} \cdot \frac{1}{1+z_0 g(v_d)} \cdot \{\delta \cdot y_1'(t) + \frac{\delta^2}{2} \cdot y_1(t) - 2e^{-\mu l_1} \cdot y_2''(t-l_1) - (2\mu + \delta + \delta^2 l_1) \cdot e^{-\mu l_1} \cdot$$

$$\cdot y_2'(t-l_1) + \frac{\delta^2}{2}(1-\delta l_1) \cdot y_2(t-l_1)\},$$

なる非線型の差分-微分方程式系が得られる。これらの方程式系を解けば、かなりよい近似で解が得られると思われる。ここに、注意すべきことは、 y_1'' 、 v_d' は、すべて $1+z_0g(v_d)$ で割ってあることである。すなわちもし、

$$(5.2; 37) \quad 1+z_0g(v_d)=0$$

なる関係が成立すれば、 v_d' 、 $y_1''(t)$ が無限大、すなわち、非常にパルス化された波形が生起することが予想される。

今、 μl_1 が大であって、 $\alpha^2(=e^{-\mu l_1})$ が非常に小さくなり、それを係数にもつ項が省略できると仮定すると：

$$(5.2; 38) \quad y_1''(\tau) = -\frac{\beta}{N(v_d)} \left\{ \frac{\lambda}{\beta} \cdot y_1'(\tau) + \frac{1}{\beta} N(v_d) \cdot y_1'(\tau) - N(v_d) \cdot (y_1'(\tau) - y_1(\tau) + \gamma y_2'(\tau - \mu l_1)) - N(v_d) \cdot y_2(\tau - \mu l_1) \right\},$$

$$y_2''(\tau) = \beta \left\{ y_1(\tau - \mu l_1) - \frac{1}{\beta} y_2'(\tau) + y_2(\tau) \right\},$$

$$v_d'(\tau) = -\frac{\beta \tau_0 / l}{N(v_d)} \cdot \left\{ \frac{\lambda}{\beta} y_1'(\tau) + y_1(\tau) + \gamma \cdot y_2(\tau - \mu l_1) \right\}$$

なる方程式系が得られる。ここで、

$$(5.2; 39) \quad \begin{cases} \gamma \equiv 1 - \lambda \mu l_1; & \mu \tau \equiv t; & \lambda \equiv \delta / \mu; & \beta \equiv \lambda^2 / 2; & N(v_d) \equiv 1 + z_0 g(v_d); \\ g(v_d): & \text{微分コンダクタンス} \end{cases}$$

としている。

5.3. (4.1_d; δ)、(4.2_d; δ)、(4.3_d; δ)、(4.4_d; δ) の場合：即ち無歪条件： $RC=GL$ (または $\delta=0$)、の成立する場合。

この場合には、(5.2; 2) 式はふつうの波動方程式に縮退し、 $u(x, t)$ は任意の函数 Φ_1 、 Φ_2 によってダランベールの解が得られる。すなわち。

$$(5.3; 1) \quad u(x, t) = A\Phi_1(t-x/a) + B\Phi_2(t+x/a),$$

さらに、変数変換：

$$(5.3; 2) \quad \Phi(t) \equiv e^{-\mu t} \cdot \Phi_1(t),$$

を行なうと、境界条件 (3.5; 1)、(3.5; 2)、(3.5; 3) と (4.1) から次の非線型差分方程式系が得られる。ただしこの場合 $G_d=0$ とした。(計算省略)

$$(5.3; 3) \quad \frac{d}{dt} v_d = -\frac{1}{C_d} \cdot f(v_d) + \frac{1}{C_d z_0} \cdot \Phi(t) + \frac{e^{-\frac{R}{L} 2l_1}}{C_d z_0} \cdot \Phi(t-2l_1)$$

$$(5.3; 4) \quad \frac{d}{dt} \Phi(t) = \frac{z_0}{L_d} (E - v_d) - e^{-\frac{R}{L} 2l_1} \cdot \frac{d}{dt} \Phi(t-2l_1) \\ - \frac{z_0}{L_d} \left(1 + \frac{R_d}{z_0} \right) \Phi(t) + \frac{z_0}{L_d} \left(1 - \frac{R_d}{z_0} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} 2l_1} \cdot \Phi(t-2l_1)$$

ただし、ここで Φ は (5.3; 2) で定義した任意函数である。

5.3.1. パラメーターの導入とそれによる式変形、

次に、以下の記号変換を行う。すなわち：

$$(5.3; 5) \quad \text{定義：} \begin{cases} 2l_1 \cdot x \equiv t, & z_0 \equiv \sqrt{L/C}, & l_1 \equiv l/a, \\ \alpha \equiv e^{-2(\frac{R}{L})l_1} : & \text{減衰度を表わすパラメーター} \\ \varepsilon_c \equiv \frac{c_d}{2lC} \equiv \frac{c_d z_0}{2l_1} : & \text{capacitive な無次元のパラメーター} \\ \varepsilon_L \equiv \frac{L_d}{2lL} \equiv \frac{1}{2l_1} \frac{L_d}{z_0} : & \text{inductive な無次元のパラメーター} \end{cases}$$

そうすると、

$$(5.3; 6a) \quad \varepsilon_c \cdot \frac{d}{dx} v_d = -z_0 f(v_d) + \Phi(x) + \alpha \cdot \Phi(x-1),$$

$$(5.3; 6b) \quad \varepsilon_L \cdot \left\{ \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{d}{dx} \alpha \cdot \Phi(x-1) \right\} = E - v_d - (1 + R_d/z_0) \cdot \Phi(x) + \alpha(1 - R_d/z_0) \cdot \Phi(x-1),$$

なる式が得られる。さらに R_d が z_0 に比較して小さいと仮定すると：

$$(5.3; 7a) \quad \varepsilon_c \cdot \frac{d}{dx} v_d = -z_0 f(v_d) + \Phi(x) + \alpha \Phi(x-1),$$

$$(5.3; 7b) \quad \epsilon_L \left\{ \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{d}{dx} \alpha \cdot \Phi(x-1) \right\} = (E - \nu_d) - \Phi(x) + \alpha \Phi(x-1)$$

となる。この (5.3; 7a), (5.3; 7b) を見ると、パラメーターとしては、 α, z_0, E , 及び ϵ_c, ϵ_L の 5 個となる。このうち、 α は分布回路の減衰を表現するものであり、 E はダイオードの直流バイアスであるから、独立な明確な意味をもっているパラメーターである。そこで、今、 E と z_0 を固定して考えると 3 個のパラメーター $\alpha, \epsilon_L, \epsilon_c$ が残ることになる。このうち、 ϵ_L と ϵ_c は夫々インダクタンス、及びキャパシタンスの分布定数と集中定数との比を意味し、かつ無次元量であるから、その上、さらにお互に独立であるから、摂動パラメーターとして使用することが可能である。さらに、

特別な場合として、 $\epsilon_c=0, \epsilon_L=0$ とすると、次の方程式が成立する：

$$(5.3; 8) \quad z_0^{-1} \{ \Phi(x) + \alpha \Phi(x-1) \} = f \{ E - (1 + R_d/z_0) \cdot \Phi(x) + \alpha \cdot (1 - R_d/z_0) \cdot \Phi(x-1) \},$$

この方程式は、

$$(5.3; 9) \quad \Phi(x) = F \{ \Phi(x-1) \},$$

と書かれるから、 $0 < x \leq 1$ のときの $\Phi(x)$ の値から、 $1 < x \leq 2$ のときの $\Phi(x)$ の値・・・という具合に逐次求めることが出来る。そこで、この差分方程式を次のようにグラフィカルに求める。(5.3; 9) は、

$$(5.3; 10) \quad \begin{cases} X \equiv -(1 + R_d/z_0) \cdot \Phi(x) + \alpha(1 - R_d/z_0) \cdot \Phi(x-1), \\ Y \equiv z_0^{-1} \{ \Phi(x) + \alpha \cdot \Phi(x-1) \}, \\ Y = f(E + X), \end{cases}$$

とおくとベクトル (X, Y) をベクトル $(\Phi(x), \Phi(x-1))$ へ変換する同次変換を与えている。又最後の式により x と y とは非直線 (抵抗) 関係によって結ばれた曲線を表わすから、 $(\Phi(x), \Phi(x-1))$ も又曲線関係によって関係づけられていることになる。結局第 5 図のようなグラフによって求めることが出来る。この図では、結局、 x 軸から θ_1, θ_2 だけ回転するとそれぞれ $\Phi(t)$ 、及び $\Phi(t-1)$ 軸が求まる。第 5 図の例では丁度 $\theta_2 = \pi (\tan \theta_2 = \infty)$ のため y 軸と $\Phi(t-1)$ 軸とが重なっている。

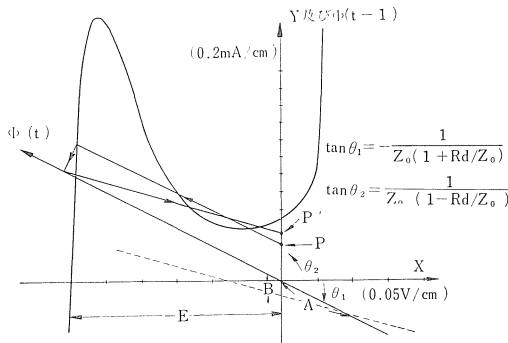


Fig. 5 P点から p'点を求めるグラフィカルな手法

番号	E ボルト	Z ₀ オーム	R _d オーム	α
①	0.1	100	0	1
②	0.1	100	0	0.5
③	0.1	100	0	0.25
④	0.2	100	0	1
⑤	0.2	100	0	0.5
⑥	0.2	100	0	0.25
⑦	0.3	100	100	0.5
⑧	0.3	100	100	1
⑨	0.2	100	100	0.25

Fig. 6

又、図中に示した点線は $\Phi(t)$ 軸と $\Phi(t-1)$ 軸のスケールの比 A/B を表わすものである。すなわち：

$$(5.3; 11) \quad \frac{A}{B} = \frac{\Phi(t) \text{ の単位目盛}}{\Phi(t-1) \text{ の単位目盛}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{(1 + R_d/z_0)^2 + (1/z_0)^2}{(1 - R_d/z_0)^2 + (1/z_0)^2}},$$

図の例では、 $z_0=100(\Omega)$, $R_d=100(\Omega)$, $\alpha=1$, の場合にあたる。この作図法を用いて第 6 図の場合について求めた結果が第 7 図に示してある。この例では、初期値はすべて $-1 < t \leq 0$ で、 $0 < \Phi(t) \leq 1$ と仮定して求めた。この第 7 図から次のような結論が得られる：

(i) 無歪条件の成立する場合、減衰パラメーター α は、主としてパルスの振巾に効果を与える。すなわち α が増すに

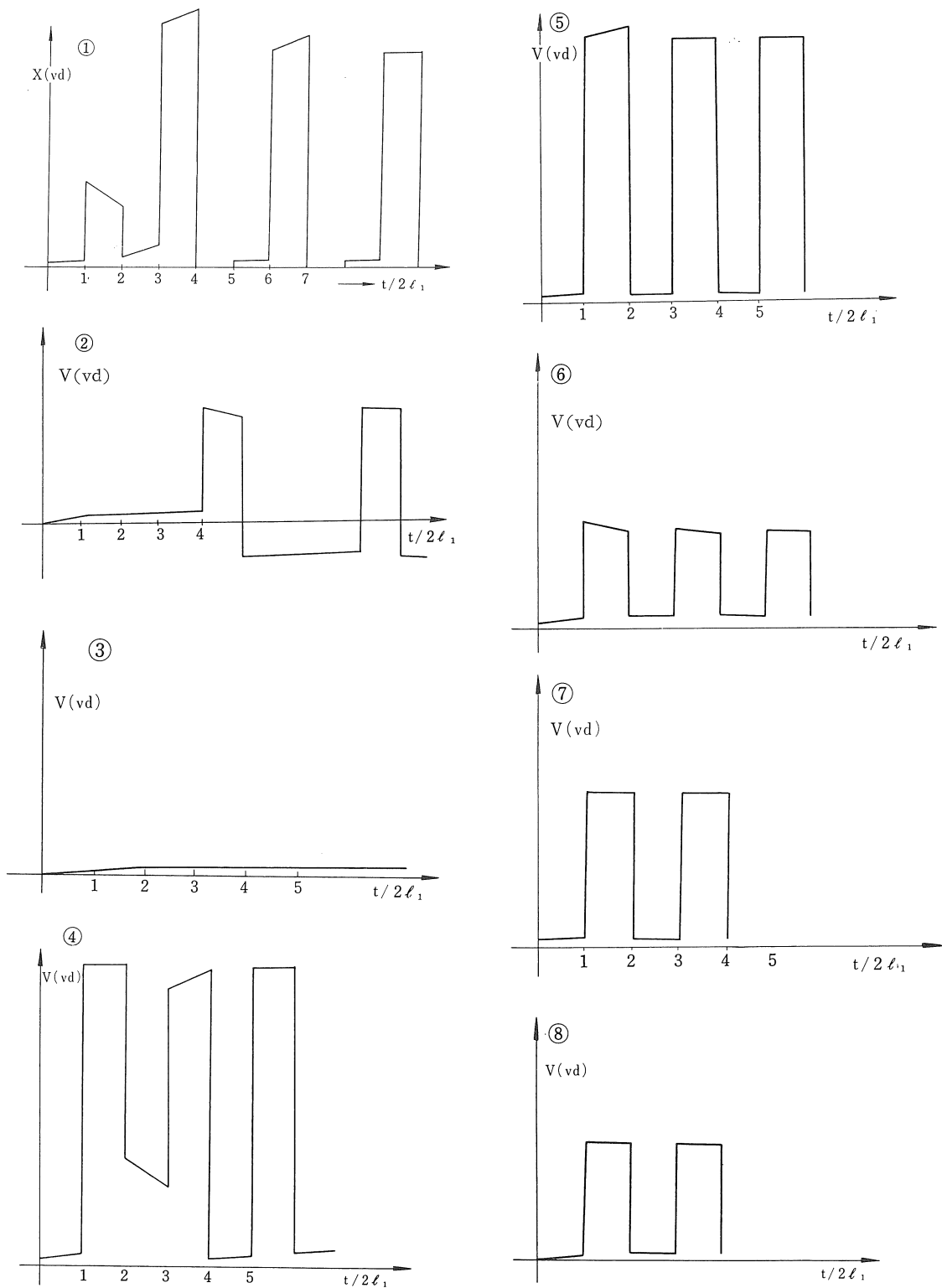


Fig. 7 の 1, 2, 3

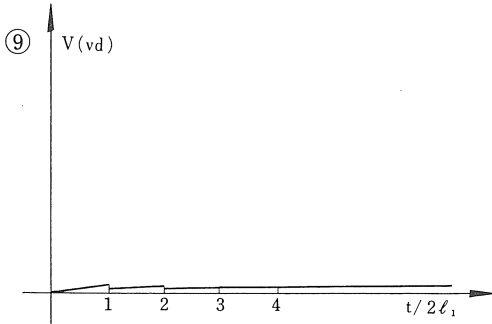


Fig. 7 Fig. 6. の①から⑨迄の場合をグラフィカルな方法で求めた発振波形

つれて振巾は減少する。しかし、その半面、パルスは安定化する。しかし、多少、周波数にも影響を与える。しかしその効果はわずかである。

- (ii) 直流バイアス E は、パルスに対して複雑に影響する：周波数は E が増すにつれて減少する。等々。しかし、その効果はグラフィカルな手法のみでは、明確に把握できない。
- (iii) 集中パラメーターは、パルスの本質、即ち周波数、振巾には効果をあまり与えない。しかし、発振を起こすかどうかということには大きい効果を及ぼす。すなわち回路の制御機能としての役割をもつ。

5. 4. (3, 1_d), (3, 4_d) 及び (2, 1_d), (2, 4_d) の場合：

(2, 1_d), と (3, 1_d) 又は, (3, 4_d) と (2, 4_d) とは次の dual 変換によって相互に置換することができる。

$$(5.4; 1) \quad v \rightleftharpoons i, \quad L \rightleftharpoons C, \quad R \rightleftharpoons G.$$

したがって、いずれか一方のみを論ずれば偏微分方程式としては同じことである。ここでは (2, 1_d) を取扱うことにする。微分方程式系は、

$$(5.4; 2) \quad \partial v / \partial x + L \cdot \partial i / \partial t + R \cdot i = 0, \quad \partial i / \partial x + G \cdot v = 0,$$

である。そこで、(2. 3) と同じ形式の変数変換：

$$(5.4; 3) \quad (2. 3) \text{ と同じ形式： } v(x, t) = \partial w / \partial x; \quad i(x, t) = -G \cdot w,$$

あるいは、(2. 3) の dual な形式の変数変換：

$$(5.4; 3a) \quad \text{dual 形式： } v(x, t) = -L \cdot (\partial w / \partial t) - R \cdot w, \\ i(x, t) = \partial w / \partial x,$$

上の両形式のいずれによっても、(5.4; 2) のうち、一方は恒等的にみたされ、他方からは、

$$(5.4; 4) \quad \partial^2 w / \partial x^2 - GL \cdot (\partial w / \partial t) - GR \cdot w = 0,$$

なるかたちの偏微分方程式が得られる。従って、(5.4; 3) と (5.4; 4), 又はと (5.4; 3a) と (5.4; 4) とを連立させて v, i を求め、そのいずれもが境界条件を満足するようにすれば、求める方程式系が得られる。そこで、

$$(5.4; 5) \quad w \equiv e^{-\frac{R}{L}t} \cdot u \equiv e^{-\mu t} \cdot u, \quad \text{とおくと、(5.4; 4) から放物型の方程式 (熱電導の方程式) が得られる：}$$

$$(5.4; 4a) \quad \partial^2 u / \partial x^2 - GL \cdot (\partial u / \partial t) = 0,$$

この方程式を積分方程式のかたちで解を求める方法は、グリーン函数を用いる方法及び基本解を用いる方法等、色々あるが (皆結果としては同一である)、ここでは後者を用いて、この式の一般解を次の形の方程式に表わす： $i.e.$ 単層ポテンシャルによるもの (普通の熱源) と 2 重層ポテンシャル (双極子) によるものとの代数和として表わそう：

$$(5.4; 6) \quad \text{一般解： } u(x, t) = \int_0^t \frac{\varphi_1(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot d\tau + \int_0^t \frac{\varphi_2(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \cdot (x-l) \cdot e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot d\tau \\ + \int_0^t \frac{a\psi_2(\tau)}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot d\tau + \int_0^t \frac{a\psi_1(\tau)}{\sqrt{\pi}\sqrt{(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot d\tau, \quad \text{又、}$$

$$(5.4; 7) \quad \partial w(x, t) / \partial x = \int_0^t \frac{\varphi_1(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot d\tau - \int_0^t \frac{\varphi_1(\tau)}{4a^3\sqrt{\pi}(t-\tau)^{5/2}} \cdot x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot d\tau \\ + \int_0^t \frac{\varphi_2(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot d\tau - \int_0^t \frac{\varphi_2(\tau)}{4a^3\sqrt{\pi}(t-\tau)^{5/2}} \cdot (l-x)^2 \cdot e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot d\tau \\ - \int_0^t \frac{\psi_1(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot d\tau - \int_0^t \frac{\psi_2(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \cdot (x-l) \cdot e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot d\tau,$$

そこで、先ず次の変数変換をしておく： $a \equiv 1/\sqrt{GL}$

$$(5.4; 8) \quad \text{定義: } \begin{cases} e^{-\mu t} \cdot \varphi_1(t) \equiv y_1(t), & e^{-\mu t} \cdot \varphi_1(\tau) = e^{-\mu(t-\tau)} \cdot y_1(\tau), \\ e^{-\mu t} \cdot \varphi_2(t) \equiv y_2(t), & e^{-\mu t} \cdot \varphi_2(\tau) = e^{-\mu(t-\tau)} \cdot y_2(\tau), \\ e^{-\mu t} \cdot \psi_i(t) \equiv z_i(t) \quad (i=1,2), & e^{-\mu t} \cdot \psi_i(\tau) = e^{-\mu(t-\tau)} \cdot z_i(\tau), \end{cases}$$

$$(5.4; 9) \quad \begin{cases} 2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{2/3} \equiv \theta_1(t-\tau) (= \theta_1), & \begin{cases} e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}} \equiv k_1(t-\tau) (= k_1), \\ e^{-\mu(t-\tau)} \equiv k_2(t-\tau) (= k_2), \end{cases} \\ a^{-1}\sqrt{\pi}(t-\tau)^{1/2} \equiv \theta_2(t-\tau) (= \theta_2), \\ 4a^3\sqrt{\pi}(t-\tau)^{5/2} \equiv \theta_3(t-\tau) (= \theta_3), \end{cases}$$

上のような変数変換を行い, $u(0, t)$, $u(l, t)$ 等々を求めると:

$$(5.4; 10a) \quad e^{-\mu t} \cdot u(0, t) = y_1(t) - l \int_0^t y_2(\tau) \cdot \frac{k_1 k_2}{\theta_2} d\tau + \int_0^t z_1(\tau) \cdot \frac{k_2}{\theta_2} d\tau + \int_0^t z_2(\tau) \cdot \frac{k_1 k_2}{\theta_2} d\tau,$$

$$(5.4; 10b) \quad e^{-\mu t} \cdot u(l, t) = l \int_0^t y_1(\tau) \cdot \frac{k_1 k_2}{\theta_1} d\tau - y_2(t) + \int_0^t z_2(\tau) \cdot \frac{k_2}{\theta_2} d\tau + \int_0^t z_1(\tau) \cdot \frac{k_1 k_2}{\theta_2} d\tau,$$

$$(5.4; 11a) \quad e^{-\mu t} \cdot (\partial u(0, l) / \partial t) = \int_0^t y_1(\tau) \cdot \frac{k_2}{\theta_1} d\tau - y_1(t) + \int_0^t y_2(\tau) \cdot \frac{k_1 k_2}{\theta_1} d\tau - l^2 \int_0^t y_2(\tau) \cdot \frac{k_1 k_2}{\theta_3} d\tau - z_1(t) \\ + l \int_0^t z_2(\tau) \cdot \frac{k_1 k_2}{\theta_1} d\tau,$$

$$(5.4; 11b) \quad e^{-\mu t} \cdot (\partial u(l, t) / \partial x) = \int_0^t y_1(\tau) \cdot \frac{k_1 k_2}{\theta_1} d\tau - l^2 \cdot \int_0^t y_1(\tau) \cdot \frac{k_1 k_2}{\theta_3} d\tau - y_2(t) + \int_0^t y_2(\tau) \cdot \frac{k_3}{\theta_1} d\tau - \\ - l \int_0^t z_1(\tau) \cdot \frac{k_1 k_2}{\theta_1} d\tau + z_2(t),$$

ここで, 注意しなければならないのは, この場合の方程式は, 差分の入らない微分-積分方程式であるということである。そこで, 次に簡単な場合について, フーリエの方法による解法を試みた。

5.4.1. (3, 4_d) でかつ, $\begin{bmatrix} R & R_d \\ G & G_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R & 0 \\ -G & 0 \end{bmatrix}$ の場合;

この場合, 境界条件は

$$(5.4; 12) \quad u(0, t) = 0,$$

$$(5.4; 13) \quad e^{\frac{\alpha}{\sigma} t} \cdot \partial u / \partial x|_{x=l} = f(E - R e^{-\frac{\alpha}{\sigma} t} u)|_{x=l},$$

となる。先づ, フーリエの方法では, 解を次の形, すなわち変数分離 (内積) の形に仮定する:

$$(5.4; 15) \quad u(x, t) = e^{-\lambda^2 a^2 t} \cdot X(\lambda x) = e^{-\lambda^2 a^2 t} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x), \quad (5.4; 12) \text{ より:}$$

$$(5.4; 16) \quad A = 0, \quad \text{次に, (5.4; 13) から}$$

$$(5.4; 17) \quad v_d = E - R e^{-(\mu + \lambda^2 a^2) t} \cdot X(l),$$

(5.4; 17a) $e^{-(\mu + \lambda^2 a^2) t} \cdot \lambda \cdot B \cos \lambda l = f(E - R e^{-(\mu + \lambda^2 a^2) t} B \sin \lambda l)$, なる代数的超越方程式が得られる。この方程式において, $\lambda = \lambda(t)$ と考えて λ を時間の函数として求めれば, v_d は (5.4; 17) から求めることになる。なお, B は初期条件から定められる任意定数である。これらの方程式の数値解は割愛させていただいた。

§6 パルス発生条件の算出法

以上の解析方法により, 損失分その他の回路パラメーターが, 発振パルスにどのような効果を表わすか, すなわち, 回路パラメーターと発振波形, 周波数等との関係は大体把握されるが, 逆の問題: 実際に要求されるパルスが発生するためには, 回路パラメーターはどんな値をえらぶべきか, という問題を考えてみる。

そこで, 先ずこの系の解の集合: (それを解空間と呼ぶことにする)

$$(6.1) \quad V_d \ni v_d(t; L, C, R, G; L_d, C_d, R_d, G_d),$$

と書けば, 今, この空間に適当な距離, あるいはもっと一般的にノルムを導入する。具体的には, 例えばヒルベルト空間 L_2 とみなして, 次式で距離を定義する:

$$(6.2) \quad d^2(v_d, v'_d) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \|v_d(t) - v'_d(t)\|^2 dt,$$

この場合, 積分範囲は必ずしも $(-\infty, +\infty)$ でなくてもよい, 必要な有限範囲でよい。一方, パルスの集合空間:

$$(6.3) \quad P \ni P_i(t; T, W, H), \quad T: \text{パルスの繰返し周期}; W: \text{パルス巾}; H: \text{高さ};$$

を考える。そのパルス集合空間で, 実際に要求されているパルス:

$$(6.4) \quad P(t; T, W, H) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i,$$

(6.5) 及びその n 次近似:

$$(6.5) \quad P_n(t; T, W, H) = \sum_{i=0}^n a_i P_i,$$

とすると、結局、問題の定式化： V_i のなかから P_n にもっとも近いものを探し出すこと：すなわち

$$(6.6) \quad \min_{L, C, \dots} d(v_d[t, L, \dots], P_n),$$

となるように L, C を決定する問題、一種の変分問題に帰着される。この (6.6) は、又、

$$(6.6a) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial L}\right) d(v_d, P_n) = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial C}\right) d(v_d, P_n) = 0, \end{cases}$$

なる連立方程式が、各の P_n について成立するので、回路パラメーターの (ベクトル) 列：

$$(6.7) \quad (L_0, C_0, \dots), (L_1, C_1, \dots), \dots$$

が得られる。このベクトル (L_i, \dots) のノルムが i 番目と $i+1$ 番目であり変わらない場合には、 $i+1$ 近似できることを示している。もし、その差が著しく違う場合には、 i 近似以上は出来ないことを示している。そして、 i と $i+1$ で著しく異なる素子がある、例えば、 L_i と L_{i+1} とが、 $(L_i - L_{i+1})/L_i$ の値が、相当大きい場合には、 L は精度をよくして、慎重にえらばなければ目的のパルスを i 近似出来ないことになる。

上に定式化された方法を、例えば、ダイナミック・プログラミング手法により解くことも可能と思われる。

§7. 結 言

以上、ごく大ざっぱにはあるが、有損失分布型発振器について、その回路パラメーターと発振波形、周波数との関係を求める方法、及びその逆の問題：パルスが与えられたときの回路パラメーター決定問題を論じた。

猶、もっと具体的なことについては現在 研究中であり、出来次第 発表してゆくつもりである。終りに、日頃、御指導いただいている、名古屋工業大学武藤三郎教授に深謝申し上げる。また、計算並びに図面の作成にあたって、一方ならぬ御援助、御助力いただいた愛知工業大学計算機室の皆さん、特に小林敏子氏に深く感謝する次第である。

APPENDIX

(附 1.) $K_{i0} (i=1, 2, 3, 4)$ の計算：

$$(A.1) \quad K_{10} = \lim_{z \rightarrow 0} K_1(z) = \delta^4 \cdot \left(-I_1^2 \cdot \frac{1}{\delta^2 \cdot I_1^2} \cdot I''(\delta i l_1) \right) \doteq \frac{\delta^2}{2} \dots$$

$$(A.2) \quad K_{20} = \lim_{z \rightarrow 0} K_2(z) = \delta^2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{I'(\delta z)}{\delta z} \doteq \frac{\delta^2}{2} = K_{10}$$

$$(A.3) \quad K_{30} = \lim_{z \rightarrow 0} \{K_3(z) + (\mu + \delta)K_4(z)\} = \lim_{z \rightarrow 0} K_3(z) + (\mu + \delta) \lim_{z \rightarrow 0} K_4(z) \doteq -\frac{\delta^2 I_1 \mu}{2} + (\mu + \delta) \cdot \frac{\delta^2 I_1}{2} = \frac{\delta^2 I_1}{2}$$

(附 2.) $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{a(x,t)} h(\tau, x, t) d\tau$ の計算：

$$(A.4) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} H(\tau, x, t) \equiv h(\tau, x, t)$$

とおくと、

$$(A.5) \quad \int_0^{a(x,t)} h(\tau, x, t) d\tau = H(a(x, t), x, t) - H(0, x, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{a(x,t)} h(\tau, x, t) \cdot d\tau &= \frac{\partial}{\partial x} \{H(a(x, t), x, t) - H(0, x, t)\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} H(\tau, x, t) \Big|_{\tau=a(x,t)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} a(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} H(\tau, x, t) \Big|_{\tau=a(x,t)} - \frac{\partial}{\partial x} H(0, x, t); \quad (A.4) \text{ より} \end{aligned}$$

$$(A.6) \quad = h(\tau, x, t) \Big|_{\tau=a(x,t)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} a(x, t) + \int_0^{a(x,t)} \frac{\partial}{\partial x} h(\tau, x, t) d\tau$$

$$(A.6) \quad \text{式を使えば } \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{t-x_1} y_1(\tau) \dots d\tau, \text{ 等々はすべて計算することが可能である。}$$

(附 3.) 熱方程式の初期境界値問題:

先ず, $u(s, z)$ を次の方程式:

$$(A. 7) \quad L[u] \equiv \frac{\partial u}{\partial s} - k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

の半無限 strip のなかでの解であるとしよう.

$$(A. 8) \quad 0 \leq z \leq R, \quad 0 \leq s,$$

我々は, この strip の内部の点 (t, x) での u の値を, 記述された境界値及び初期データを使って表したいのである:

$$(A. 9) \quad \begin{cases} u(0, z) = f(z), & \text{for } 0 \leq z \leq R, \\ u(s, 0) = g(s), \quad u(s, R) = h(s), & \text{for } s \leq 0, \end{cases}$$

この目的のために, 我々はグリーンの恒等式を用いることにする. 今, $v(s, z)$ が adjoint な方程式の regular solution であるとする:

$$(A. 10) \quad M[v] = -\frac{\partial v}{\partial s} - k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

次の矩形のなかにおいて:

$$(A. 11) \quad 0 \leq z \leq R, \quad 0 \leq s \leq T,$$

そうすると,

$$(A. 12) \quad \begin{aligned} 0 &= \int_0^T ds \int_0^R dz (vL[u] - uM[v]) \\ &= \int_0^T ds \int_0^R dz \left(-\frac{\partial uv}{\partial s} + k \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \\ &= \int_{s=0}^R uvdz - \int_{s=0}^R uvdz + k \int_{z=0}^T \left(u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right) ds \\ &\quad - k \int_{z=0}^T \left(u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right) ds \end{aligned}$$

今, v が s と z の外にさらにパラメータ t, x に依存しているとする:

$$(A. 13) \quad v = G(t, x, s, z),$$

そして, G は, 次の性質を有している:

$$(a) \quad M[G] = -\frac{\partial G}{\partial s} - k \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0,$$

$$\text{for } 0 \leq z \leq R, \quad 0 < x < R, \quad 0 \leq s \leq t,$$

$$(b) \quad G(t, x, s, z) - K(t-s, z-x) \text{ は,} \\ 0 \leq z \leq R, \quad 0 < x < R, \quad 0 \leq s \leq t, \text{ で連続ある.}$$

$$(c) \quad G(t, x, s, 0) = G(t, x, s, R) = 0, \text{ for } 0 < x < R, \quad 0 \leq s \leq T.$$

$$(d) \quad G(t, x, t, z) = 0 \text{ for } 0 \leq z \leq R, \quad 0 < x < R, \quad x \neq z,$$

このような G に v が等しいとおくと:

$$(A. 13) \quad \lim_{T \rightarrow t-} \int_{s=T}^R uGdz = u(t, x) \quad (\text{計算略})$$

なることが導かれる. これから, 結論式:

$$(A. 14) \quad u(t, x) = \int_0^R f(z)G(t, x, 0, z)dz - k \int_0^t h(s) \left(\frac{\partial G(t, x, s, z)}{\partial z} \right)_{z=R} ds + k \int_0^t g(s) \left(\frac{\partial G(t, x, s, z)}{\partial z} \right)_{z=0} ds.$$

なる式が導かれる. ここで G はグリーン函数と呼ばれ, 実際には, 次の式で表現される:

$$(A. 15) \quad G(t, x, s, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [K(t-s, z-x-2nR) - K(t-s, -z-x+2nR)]$$

ここで, $K(t, z) \equiv 4\pi kt^{-1/2} \cdot e^{-|z|^{2/4kt}}$,

又, G は Theta 函数を用いて,

$$(A. 15a) \quad G = \frac{1}{2R} \left[\theta_3 \left(\frac{x-z}{2R}, \frac{i\pi(t-s)k}{R^2} \right) - \theta_3 \left(\frac{x+z}{2R}, \frac{i\pi(t-s)k}{R^2} \right) \right],$$

ここに θ_3 は：

$$\theta_3(v, i\pi t) = (\pi t)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(v+n)^2/t},$$

さらに、次のようにして解を表現することも出来る。(A.N. Milgram による)。

$$(A. 16) \quad \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial n} Z(x, t, \xi, \tau) d\tau d\xi = -E(x) + \int_0^t Z(x, t, y, 0) dy$$

ここで、

$$E(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in E_n - \dot{O} \\ 1, & \text{if } x \in \dot{O}, \\ \frac{1}{2}, & \text{if } x \in \dot{O}, \text{ and is smooth at } x, \end{cases}$$

これらは、jump 現象である。古典的なポテンシャル理論との類似により：

$$(A. 17) \quad U(x, t) = \int_0^t \int_0^t \mu(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial n} Z(x, t, \xi, \tau) d\sigma d\tau$$

とおく。 $U(x, t)$ は 0 のすべての内点で初期値 0 の熱方程式の解である。今 $A(\xi, t)$ を O の境界 \dot{O} で定義されている与えられ函数であるとする。 $\lim_{x \rightarrow \xi_0} U(x, t) = A(\xi_0, t)$ という要求から、ここで x は内部の点を通して ξ_0 に近ずき、jump 関係を考慮すると、次の積分方程式：

$$(A. 18) \quad A(\xi_0, t) = [E(\xi_0) - 1] \cdot \mu(\xi_0, t) + \int_0^t \int_0^t \mu(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial n} Z(\xi_0, t, \xi, \tau) d\sigma d\tau,$$

が導かれる。これらの式で注意すべきは、すべて十分に滑らかな解析函数であるということである。したがって、これらの解の有限個の偏導関数も又解であることに注意する。

参 考 文 献

- 1) J. Nagumo and M. Shimura : "Self-oscillation in a transmission line with a Tunnel diode".
Proc. I.R.E, 49, 8, p.1281 (Aug. 1961)
- 2) 新美, 皆福 : "分布定数型発振器の損失を考慮した場合の数値計算"
昭和40年電気四学会東海支部連合大会予稿集 5a-A-6
- 3) 志村正道 : "エサキダイオードを含む分布定数系の強制振動",
電気通信学会誌, 昭41. 8. , vol. 49.
- 4) 後藤 etc. : "負性抵抗接続の分布定数回路における非線型振動の解析的理論",
電気通信学会誌, 昭39. 4. vol. 47. ,
- 5) 後藤, 森末 : "分布定数回路に接続された負性抵抗素子の動作特性による発振条件の算出法"
電気通信学会誌, 昭41. 5. vol. 49, p. 853.
- 6) 新美吉彦 : "分布形発振器の損失を考慮した場合の数値解についての一検討"
非直線理論研究会資料, 1966, 4. 25.
- 7) Bers, Lipman, and F. John, and M. Schechter: "Partial Differential Equations." 1964, Interscience Publishers.
- 8) 溝畑茂著 : "偏微分方程式論" 岩波, 1965.
- 9) T. L. サーティ編 : "現代の数学" I. II. 岩波. 1963.
- 10) 山口昌哉 : "偏微分方程式の初期値問題と数値解法", 昭和42年10月電子通信学会創立50周年記念シンポジウム.
S. 6-2, pp. 6.