負の重みを用いたメジアンフィルタによる帯域フィルタの性質

On a Behavior of Weighted Median Filters Admitting Negative Weights

橋之口　幸一郎[1)]　　田口　文子[1)]　　井　研治[1)]
Kouichirou HASHINOKUCHI[1)], Fumiko TAGUCHI[1)], Kenji INOMOTO[1)]

Abstract : Although linear filters show effective performance in many applications, there are certain situations when it is impossible to find an acceptable linear filter. For example, in many applications the spectrum of the desired signal and of the noise overlap and, therefore, frequency selective behavior of linear filters can not produce the desired results. In some of these cases, nonlinear filters can be used. In this paper, weighted median filter admitting negative weights, which is abbreviated as NWMF, is considered. These weights are calculated by using spectral optimization technique and are derived using FIR filter coefficients.

Steady state response of NWMF for sinusoidal input signal shows as a notch filter or frequency elimination filter with narrow bandwidth.

1.　はじめに

非線形フィルタによる周波数分析の試みとしてメジアンフィルタに負の重みを組み合わせ、その白雑音応答を調べた。またメジアンフィルタの出力がゼロとなる条件について考察を行った。

なお、この研究は情報通信工学科における平成 15 年度の卒業研究として行われたものである。

2.　フィルタ[1]

フィルタは希望する周波数帯域の波だけを通し、他の波を防止するもので電気通信においては欠くことのできないものである。フィルタが使われている例として、スピーカに入る周波数を分ける定抵抗分波ファイルや、ラジオ受信機に使われている中間周波フィルタなどがある。

信号が通過する帯域を通過域、信号が通過しない帯域を阻止域と呼ぶ。しかし、実際に得られるフィルタの周波数特性は、通過帯域と阻止帯域の他に遷移域と呼ばれる帯域が存在する。

2・1　FIR フィルタ(Finite Impulse Response filter)[2]

ここではメジアンフィルタによって帯域フィルタを実現するが、その際 FIR フィルタの係数を用いる。

この FIR フィルタはディジタルフィルタの一種で次のような特徴を有する。

- 出力から入力へのフィードバックがないので、常に安定である。
- 完全に正確な直線位相特性を実現できる。
- 周波数領域での鋭い減衰特性を実現する場合、高い次数のフィルタが必要となる。

2・2　メジアンフィルタ

メジアンフィルタは、非線形フィルタの代表的なフィルタであり、インパルス雑音を除去する性質を持っている。奇数個のデータを大きい順に並べたとき、中央の位置にくる値を median といい、このフィルタは、その値を出力とするフィルタである。入力を $X_1, X_2 \cdots, X_n$ とした時出力 Y は、

$$Y = MED[X_1, X_2 \cdots, X_n]$$

で表せる。ここで MED[ ]は、中央の値を取り出す演算を表す。

このメジアンフィルタは低域通過フィルタとなる。

2・3　重み付きメジアンフィルタ[3]

負の重み(整数)を使ったメジアンフィルを用いることにより、LPF、HPF、BPF、BEF などのフィルタを設計することが可能になる。負の重み付きメジアンフィルタの出力の計算方法は、まず負の重みと対応しているサンプル値の符号を反転させる。反転させた各サンプル値

1) 愛知工業大学　工学部　情報通信工学科

を対応する重みの値だけ複写し、大きい順にソートし、その中から中央の位置にくる値を出力するフィルタである。式で表すと出力Yは、

$$Y = MED[W_1 \diamond X_1, W_2 \diamond X_2, \cdots, W_N \diamond X_N]$$

で表すことが出来る。ここで◇は複写演算を表す。

重みがすべて1の時には通常のメジアンフィルタとなる。

2・4　設計

重み付きメジアンフィルタを設計するためには最適な重みを決める必要がある。

重みの決定方法[4]をフローチャート図1に示す。

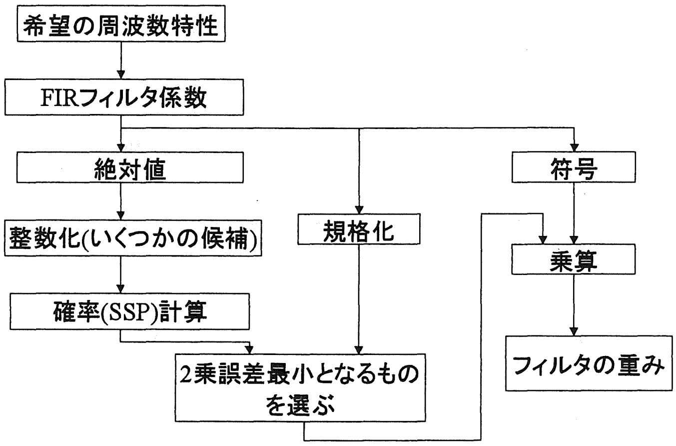


図1 重みの決定方法

2・4・1　希望の周波数特性を決める

実験では、周波数帯域を16個に分割したBPFを設計した。例として、図2に分割数4の周波数特性を示す。

分割数4の時の周波数特性は、周波数帯域を4等分に分割する。

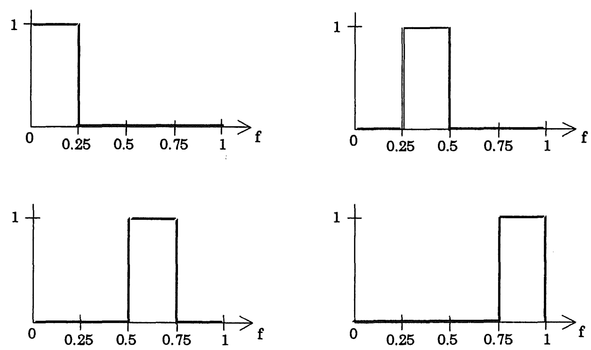


図2 分割数4の周波数特性(遷移域=0)

2・4・2　FIR係数を計算

希望の周波数特性になるように、ソフトウェアMatlabのfirls関数を用いた最小2乗法によりFIR係数を決定する。FIR係数は小数点を伴う実数値である。

2・4・3　確率(SSP)を計算[3]

FIR係数の絶対値をとり整数化すると、いくつかの候補が挙がる。

非線形フィルタにおいて、入力サンプルのうちのどれか1つを出力することを「選択」で示し、平均2乗誤差で非線形フィルタの出力と一致する線形FIRフィルタを見出すことができる。線形FIRフィルタ係数は、対応する非線形フィルタと統計的性質が密接な関係を持っている。今、非線形フィルタの出力Yが入力サンプルX_iと等しくなる確率を$P(Y=X_i)$とすれば、実際最も近い線形フィルタの重みは$h_i=P(Y=X_i)$を満たす。ここで用いた$P(Y=X_i)$のことをサンプル選択確率(sample selection probabilities :SSP)と呼ぶ。

SSPの計算には、多くの非線形フィルタを分析するために用いられているMallowの理論を利用して行う[4]。

2・4・4　メジアンフィルタの重みを選ぶ

計算したSSPとFIR係数との2乗誤差を計算し、その誤差が最小となるものを選ぶ。その重みにFIRフィルタ係数の符号を乗算し、重みとして採用する。

2乗誤差を計算する際、SSPとFIR係数の大きさを規格化して比較する必要がある。規格化の方法は、FIR係数は正・負の符号があるため絶対値の総和が1となるように規格化する。SSPは確率のため総和が1になっている。

負の重み付きメジアンフィルタは、この重みを用いて設計する。

3.　実験

実験ではフィルタ次数m = 11、遷移幅0、分割数16の帯域通過フィルタを設計した。フィルタ次数は、入力されるサンプル値の個数を示している。設計した負の重み付きメジアンフィルタに白色Gauss雑音、sin波を入力し、検証を行った。

3・1　白色Gauss雑音による出力スペクトラム

入力信号には、50種類の白色Gauss雑音を用いた。これを、設計した重み付きメジアンフィルタ入力し、各帯域の出力信号からスペクトラムを計算し、パワ平均を求めた。ある白色Gauss雑音による出力スペクトラムを図3に図示する。また図4は50種類の平均をとったスペクトラムのパワ平均を示す。この図にはFIRフィルタの特性を破線で併記した。

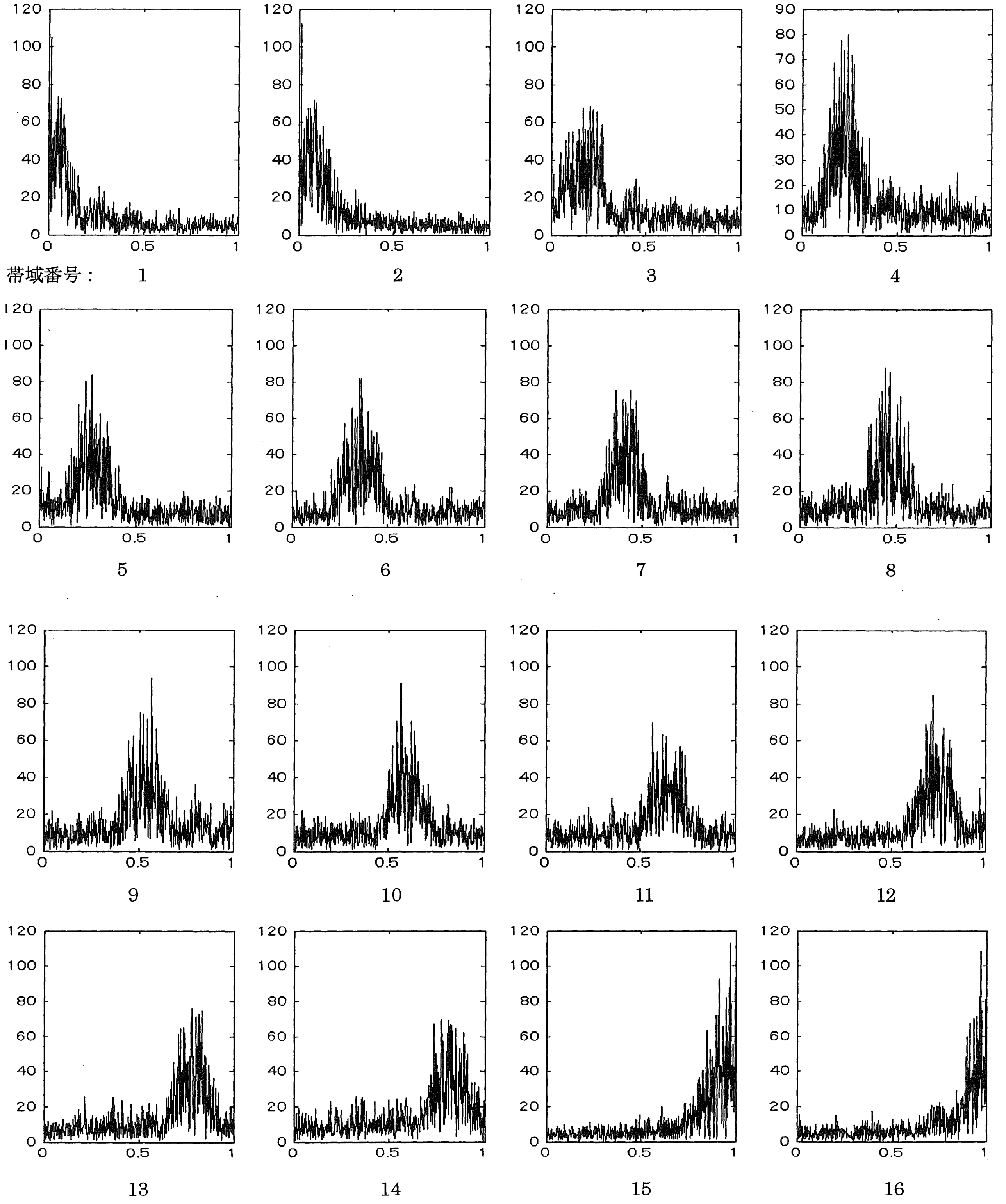


図3 白色ガウス入力に対する出力スペクトラム

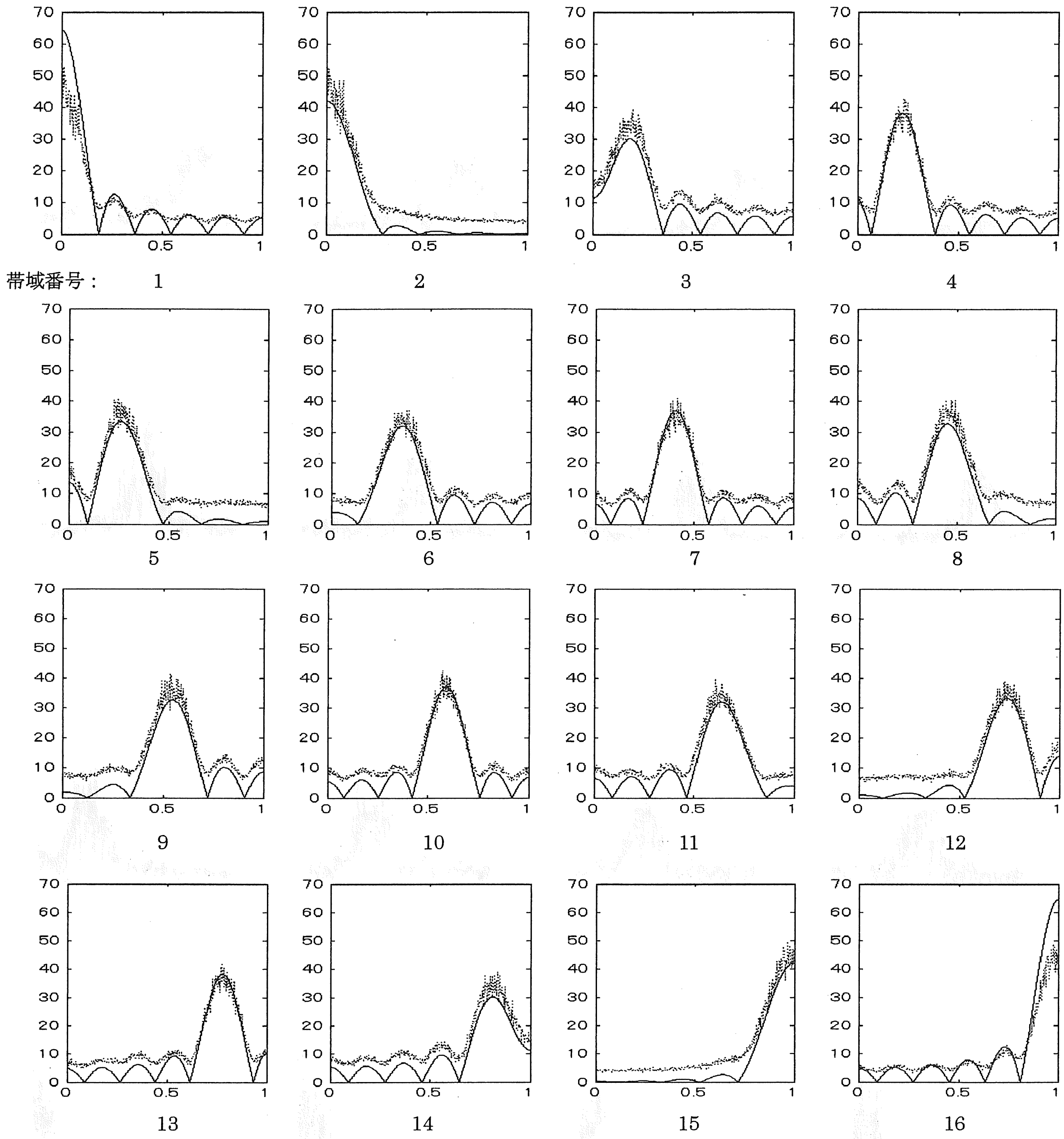


図 4 スペクトラムのパワ平均
（実線：メジアンフィルタ　破線：FIR フィルタ）

図 4 のスペクトラムを見ると周波数全体が 16 等分され、それぞれの指定した周波数帯域を取り出すことができていることが分かる。

2.3 で設計した周波数特性とスペクトラムのパワ平均を比較すると、ほぼ似た形になることから、重み付きメジアンフィルタで帯域通過フィルタを実現できるものといえる。

3・2　正弦波による出力波形

1)　周波数 150[Hz]の sin 波を A/D を介して PC 上に構築したメジアンフィルタに加え、D/A からの出力を観察する。その様子を図 5 に示す。

フィルタの出力は、sin 波の正の最大値部分がへこむ形になり、負の部分はとがった形になった。sin 波は信号の前後に関係があるため、非線形フィルタであるメジアンフィルタでは入力波形と同じ波形を出力することはできない。

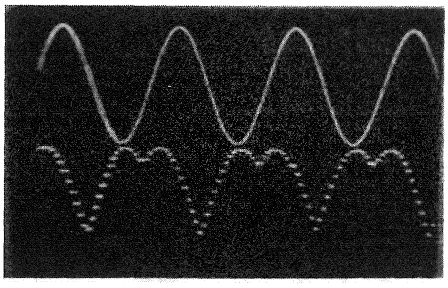


図5 sin 波の入力(上)と NWMF 出力(下)

2) 1周期のサンプリング点数が異なる sin 波 64 個を入力信号として用いる。その入力信号を重み付きメジアンフィルタの分割数4番目のフィルタで操作してシミュレーションを行う。サンプリング間隔は、1[Hz]を1周期2点、0[Hz]を1周期∞点のサンプリング点数に規格化して行う。

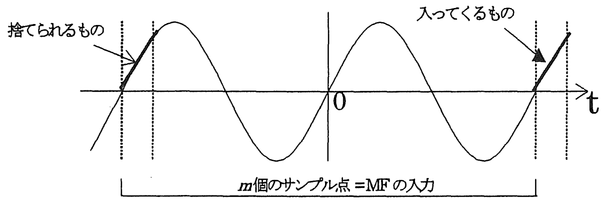
このとき規格化周波数が 24/64 の正弦波を入力した時、出力がほぼ0となった。

このことは、重み付きメジアンフィルタは非線形フィルタであるものの特定の周波数を除去する性質、つまりノッチフィルタとしての応用を示唆している。

4. 考察

メジアンフィルタの出力が0になる場合について簡単な考察を加える。

1) サンプル個数を(m：奇数)とする。正弦波が、奇関数として、かつメジアンが位相0でサンプルされる場合、出力は0となる。



このとき、メジアンフィルタへの入力が移動して、いくつかの入力データが捨てられても同じデータが入力されれば一連のサンプル値 m 個の内容は不変であり、このときも出力=0となる。

このサンプリング条件：

・正弦波($=A\sin 2\pi ft$)の n 周期がちょうど m 個(=MF の次数)の点数でサンプルすることになる。

・サンプル間隔を τ、正弦波の周期を T とすれば、正弦波の n 周期がちょうど m 個のサンプルに相当する条件より、

$$nT = m\tau$$

これより

$$\therefore \,{}^{1}\!/_{T} = {}^{n}\!/_{m\tau}$$ を得る。

よって、メジアンフィルタの出力が常に0になるには、位相0でサンプルされる時、

$$\cdot\ f = {}^{n}\!/_{m\tau} \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

の関係が成り立つ場合である。

実験では m=11 を採用しており、いくつかの n について その周波数を調べると次の表のようになる。

n	f
1	0.18
2	0.36
3	0.55
⋮	⋮

一方 3.2 2)では、f=24/64 で出力が=0 となったことから、正弦波1周期は 5.3 点でサンプルされており、MF の次数が 11 であることを考え合わせるとほぼ2周期が取り込まれている。

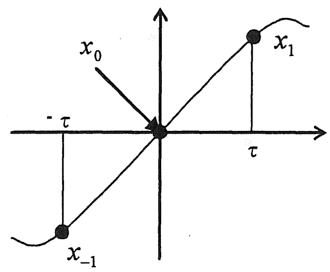
これは上の表で n=2 に相当している。

2) メジアンをサンプルする正弦波の位相が0でない場合

$0<\delta<\tau$ となる δ を考え、これでサンプル内での位相のずれを表すことにする。

この時、簡単のため3点の MF を考え、その出力がどうなるか考えてみる。

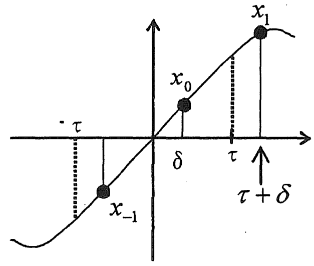
・ $\delta=0$ の場合



メジアンフィルタの出力 $= x_0$

これは1)で考えた場合に相当している。

・ $0<\delta<{}^{\tau}\!/_{2}$ の場合

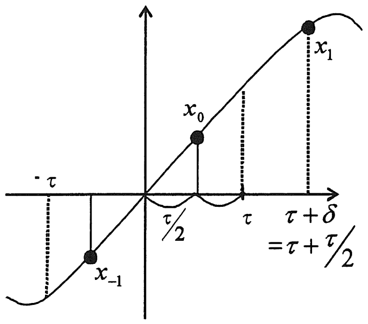


メジアンフィルタの出力 $= x_0$

$$= A\sin 2\pi f\delta$$

となり、一般に0にならない。

・ $\delta = \tau/2$ の場合



x_0 と x_{-1} の絶対値は同じであり、

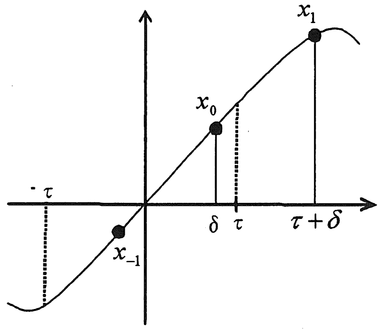
メジアンフィルタの出力 ＝ x_0

$$= A\sin 2\pi f \,\tau/2$$

となる。

このとき出力は最大となる。

・ $\tau/2 < \delta < \tau$ の場合



メジアンフィルタの出力 ＝ x_0

$$= A\sin 2\pi f\delta$$ となる。

3)　これらを踏まえて、δ が $-\tau/2 \sim \tau/2$ の間を一様分布すると仮定する。このとき、

位相によるメジアンフィルタ出力の 2 乗平均(単位時間当たりの)は、次式で与えられる。

$$\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\left(A\cdot\sin 2\pi\frac{n}{m\tau}t\right)^2 dt$$

一方、振幅 A の正弦波はパワ $A^2/2$ であるから、位相に起因する MF の 2 乗平均を振幅で規格化したものは、

・規格化 2 乗平均

$$=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A^2\cdot\sin^2 2\pi\frac{n}{m\tau}tdt \Big/ \frac{A^2}{2}$$

$$=\frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\sin^2 2\pi\frac{n}{m\tau}tdt$$

$$=1-\frac{\sin\frac{2n\pi}{m}}{\frac{2n\pi}{m}}$$

$$=1 - \mathrm{sinc}\frac{2n\pi}{m}$$

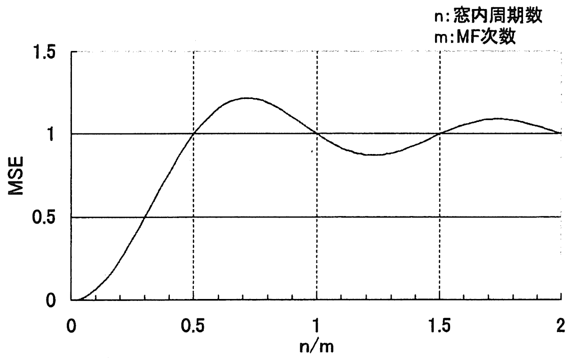


図 6 メジアンフィルタの正弦波応答

この値は n/m によって図 6 のように変化する。1)で考察した条件は m=11、n=2 であったから n/m =0.18 より、約 0.2 の規格化 2 乗平均(残留成分)を伴うことがわかる。

残留成分を小さくするには n/m を小さく選ぶことが肝要である。

5.　まとめ

ここでは負の重み付きメジアンフィルタによって帯域通過フィルタを実現する方法を詳述した。

また、正弦波入力を例に選び出力が 0 になる条件を考察した。特に帯域フィルタが実現できることは負の重み付きメジアンフィルタに代表される非線形フィルタによって周波数分析が行えることを示しており、今後の進展が待たれる。

参考文献

[1] 三上直樹：「ディジタル信号処理入門 マイコン時代の波形処理技術の基礎と応用」CQ出版株式会社 (1989)

[2] 中村尚五：「ビギナーズデジタルフィルタ」東京電機大学出版局 (1989)

[3] Ilya Shmulevich et al. :「Spectral Design of Weighted Median Filters Admitting Negative Weights.」 IEEE Sinal Processing Letters, Vol.8, No.12, Dec. (2001)

[4] S.Agaian et al. 「Binary Polynomial Transforms and Nonlinear Digital Filters.」pp.266, Marcel Dekker, Inc. (1995)

（受理　平成16年3月19日）