愛知工業大学研究報告
第34号B 平成11年

和太鼓の振動分析

Vibration Analysis of Japanese Drum

西尾 雅明†　井 研治‡
Masaaki NISHIO　Kenji INOMOTO

Abstract *A drum has been used as a tool to produce large sound by which a simple information or a signal can send to the place far beyond our vocal sound can reach. In 1877, the vibration of a kettle drum is first analyzed by Lord Rayleigh. As for Japanese drum, having circular membranes streched over both ends of a wooden vessel, an experimental approach was carried out by OBATA et al. in 1933. In this paper, a Japanese drum is theoretically discussed as a coupled vibration system which causes to produce an amplitude modulated sound. To confirm above phenomenon, two types of drum are employed, the one is an ordinary wooden drum, and the other is a drum with aluminium body. Considering sound decay curve for some lower vibration mode, a periodic amplitude fluctuation can be found in both type of drums.*

1. まえがき

太鼓は古来より日本の祭りや儀式に用いられていたが、近年各地でこれを演奏するグループが多く結成され、また音楽療法や障害児教育にもとりいれられるようになってきた。広辞苑[1)]によれば太鼓とは、打楽器の一つで、木製、金属製などの胴の両面または片面に皮を張り、撥で打ち鳴らすものと定義されており、その種類は大太鼓・楽太鼓・締太鼓など多くの種類がある。一方、室町時代に完成された能や狂言に用いられる鼓も広くこの太鼓に属する打楽器の一つと考えられる。

ところで古代の日本には「つづみ(鼓)」という言葉があって、712年に完成した古事記にも「都豆美」の文字でこれを表している[2)]。この言葉は遠くインドから渡ってきたもので、その祖形は *dundubhi* であるといわれている[3)]。一方、「たいこ」の言葉は源氏物語の末摘花の章に見ることができる。

また「太鼓」については、続日本紀の記述に、鈴鹿の関に置かれている太鼓に関する記述が見られ[5)]、これは当時(780年)、時間を知らせるために関所で鳴らしたものと思われる。

さて本報が取り上げる太鼓は一名宮太鼓と呼ばれるもので、その標準的な大きさは直径及び胴の長さが60〜90cmのものであって強く張った皮が中空の胴の両側に鉄鋲で固定されている。皮は主として牛革であり、明治以後、我が国に食肉の習慣が広まったことによってその供給は円滑に行われていると考えられる。

一方、胴の材料には欅が望まれるが、直径が大きなものが必要であって、太鼓に使える部分を切り出すには原木の直径は1mを超える。このような欅は近年ますます少なくなっているため価格も高騰気味である。そのため最近では資源保護の観点からもこの胴を他の材料、たとえば金属のアルミニウムで置き換える等の工夫が始まりつつある。

本研究ではまず太鼓の振動の理論的解析を試み、その振動が連成振動となって振幅変調を伴うことを示す。続いて上述の背景を考慮して欅胴と金属胴の太鼓について実際の音の分析を行い、顕著な音色の違いを信号分析によって明らかにすることを目的としている。

2. 膜の振動モード

2・1 基礎理論

音響工学の基礎理論によれば、膜の半径 a、張力 T、密度 σ、から次の基本周波数が定められる[6)]。

$$f_0 = 0.383\frac{1}{a}\sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad [\mathrm{Hz}]$$

膜にはこれ以外にも節となる同心円の数と、節となる直径の数によって無数の共振モードがあり、基本周波数 f_0 との比で表したこの共振周波数は表1のように

†愛知工業大学 工学研究科 電気電子工学専攻 (豊田市)
‡愛知工業大学 情報通信工学科 (豊田市)

なる。

表 1: 共振周波数の基本周波数との比

		同心円の数					
		1	2	3	4	5	6
節線の数	0	1.00	2.30	3.60	4.90	6.21	7.51
	1	1.59	2.92	4.28	5.45	6.85	8.16
	2	2.14	3.50	4.83	6.15	7.47	8.78
	3	2.65	4.06	5.41	6.75	8.07	9.39
	4	3.15	4.60	5.98	7.32	8.66	9.99
	5	3.65	5.13	6.53	7.89	9.24	10.57

振動理論では、膜の高次の振動に膜の振動変位が常にゼロとなる部分があり、これには節線及び同心円の 2 種類がある。この節線の数と、同心円の数を組み合わせてモードと呼んでいる。例えば共振の基準になる最も低いものはモード (0,1) である。図 1 はいくつかのモードに対する同心円と節直径を示したものである。

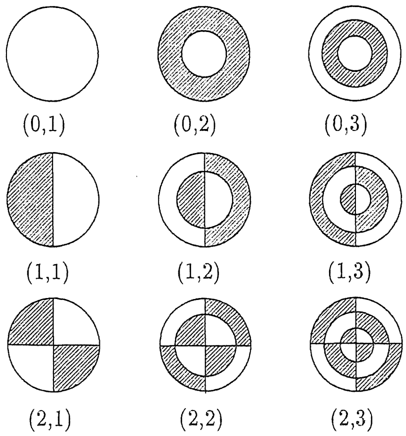


図 1: 円形膜の節

2・2　太鼓の音響等価回路

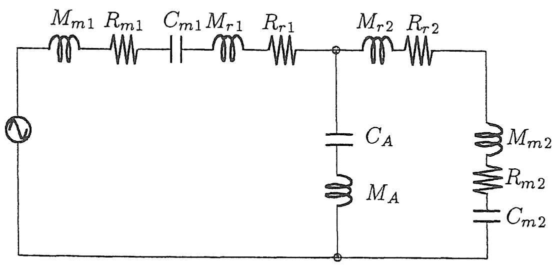


図 2: 太鼓の等価回路

太鼓の表裏の膜を j $(j=1,2)$ で表すと、膜 j についてのパラメータは次のように定められる。

M_{mj} ; 膜の等価質量
　面積率を 1/3 にすれば $\pi a^2 d\sigma/3$
　a ; 膜の半径
　d ; 膜の厚み
　σ ; 膜の密度
R_{mj} ; 膜の粘性抵抗
C_{mj} ; 膜のコンプライアンス
M_{rj} ; 膜の放射インピーダンス付加質量
　半径 a の円形ピストンでは $\frac{8}{3}\rho_o a^3$
　ただし ρ_o ; 空気の密度
R_{rj} ; 膜の放射抵抗
　半径 a の円形ピストンでは
　$\pi a^3 \rho_o c \left\{1 - \frac{J_1(2ka)}{ka}\right\}$
　J_1 は第 1 次の Bessel 関数
　c ; 空気中の音速
C_A ; 胴の空気による音響コンプライアンス
　$=V/\rho_o c^2$
　ただし $V=\pi a^2 l$, l ; 胴の長さ
M_A ; 胴内の空気の質量 $=V\rho_o$

議論を簡単にするため、次の条件のもとに考察を続ける。

・膜の放射インピーダンス (M_{rj}, R_{rj}) は考えない
・膜の粘性成分 (R_{mj}) は 0 とみなす。
・胴の内部の空気質量は 0 とみなす。

以上の条件の下で等価回路は図 3 のように簡単になる。

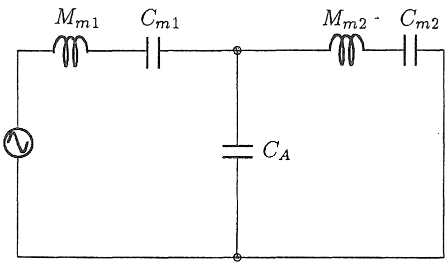


図 3: 簡単にした太鼓の等価回路

3.　太鼓の振動解析 [7)]

太鼓の片方の膜を叩いたとき、表裏の皮が胴の空気とともに振動する現象を説明するために、図 4 に示すような、ばねで結合されている 2 個の等しい水平ばね振り子から出発する。このとき質量 m_1 および m_2 は太鼓の膜の等価的な質量で代表させる。また k_1,k_2 は

表裏の膜が振動するときのスチフネスを、k は太鼓の中の空気によるスチフネスとする。

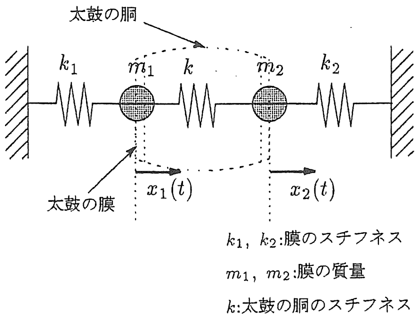


図 4: 太鼓の膜の力学モデル

時間関数 $x_1(t)$, $x_2(t)$ によって皮の振動変位を表すものとすれば、このとき質量 m_1 および m_2 に関する運動方程式は次の式となる。ここでは式を見やすくするため $x_1(t)$, $x_2(t)$ を簡単に記号 x_1 , x_2 で表している。

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

これらの式をマトリクス形式に書くと次式となり、系は静的に連成していることを示している。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k & -k \\ -k & k_2 + k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

予想されるように、胴の空気によるスチフネス k が 0 になると連成は消失し、2 枚の膜は同一の固有振動数 $\sqrt{k_j/m_j}$ $(j = 1, 2)$ を有する互いに独立な振動をする。

次に $k \neq 0$ の場合を考えてみる。式 (2) をラプラス変換すると固有値問題

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k & -k \\ -k & k_2 + k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

となり、次の特性方程式を得る。

$$\begin{aligned} &\det \begin{bmatrix} k_1 + k - \omega^2 m_1 & -k \\ -k & k_2 + k - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \\ &= (k_1 + k - \omega^2 m_1)(k_2 + k - \omega^2 m_2) - k^2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ここでさらに太鼓の膜のスチフネス、及び膜の質量は表裏ともに同じとみなし、$k_1 = k_2 = k_s$、$m_1 = m_2 = m$ とおく。すなわち、

$$\begin{aligned} (k_s + k - \omega^2 m)^2 = k^2 \\ k_s + k - \omega^2 m = \pm k \end{aligned} \tag{5}$$

したがって、それぞれの膜の固有振動数は次のようになる。

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_s}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k + k_s}{m}} \tag{6}$$

固有モードは次式から求められる。

$$-\omega_i^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1^{(i)} \\ X_2^{(i)} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k & -k \\ -k & k_2 + k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1^{(i)} \\ X_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2 \tag{7}$$

$\omega_1^2 = k_s/m$ および $\omega_2^2 = (2k + k_s)/m$ を式 (7) に代入して、1 次モードの表裏振幅比 $X_2^{(1)}/X_1^{(1)}$ および 2 次モードの表裏振幅比 $X_2^{(2)}/X_1^{(2)}$ について解くと、次式を得る。

$$\frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = r_1 = 1, \qquad \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = r_2 = -1 \tag{8}$$

したがって、第 1 次固有モードにおいては、胴の空気が圧縮膨張することなしに 2 枚の膜は同相で運動する。そしてこのことは、系の第 1 次固有振動数がいわゆる一自由度系の固有振動数 $\omega_1 = \sqrt{k_s/m}$ に等しいことからも類推できる。一方、第 2 次固有モードにおいては、2 枚の膜は位相が 180° ずれた場合になっている。

系の一般的運動は対応する固有座標を乗じた 2 個の固有モードの重ね合わせ [7] として表すことができる。すなわち、

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \begin{pmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2) \tag{9}$$

式 (8) を式 (9) に代入して次式を得る。

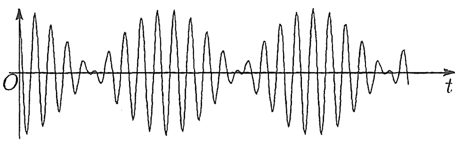
$$\begin{aligned} x_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \\ x_2(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) - C_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \end{aligned} \tag{10}$$

さて初期条件を $x_1(0) = x_0$, $x_2 = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ とする。すなわち撥で太鼓の一方をたた

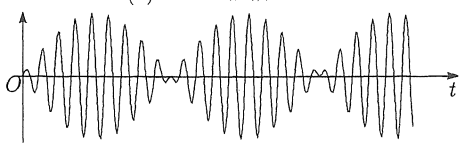
き、初期変位 x_0 を与えた場合、式 (10) は次式となる。

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{1}{2}x_0\cos\omega_1 t + \frac{1}{2}x_0\cos\omega_2 t \\
&= x_0\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cos\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t \\
x_2(t) &= \frac{1}{2}x_0\cos\omega_1 t - \frac{1}{2}x_0\cos\omega_2 t \\
&= x_0\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\sin\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

したがって $x_1(t)$ および $x_2(t)$ は、振動数 $(\omega_2-\omega_1)/2$ と $(\omega_2+\omega_1)/2$ とを持つ調和関数であると考えることができる。$x_1(t)$ および $x_2(t)$ の曲線を図 5 に示す。



(a) 膜 1 の振幅



(b) 膜 2 の振幅

図 5: 太鼓の膜の振動

幾何学的には、等振幅かつ振動数が非常に接近している 2 つの調和関数の和は、振動数が平均振動数に等しい正弦波に振幅変調を作用させたことに等しい。2 つの調波が互いに重畳して振幅が 2 倍になり、そして時間が経って 2 つの波が相殺すると振幅は零になる。この現象はいわゆる唸りの現象と知られている。

このように太鼓の膜の胴のスチフネスの大きさによって振動波形に唸りを伴う。太鼓の振動波形に唸りが見られることは OBATA ら [8] が 1935 年に実験によって明らかにしている。

4. 分析結果及び考察

4・1 分析の概要

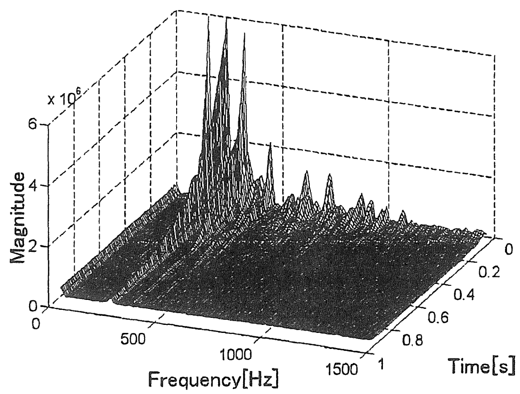
欅胴及びアルミ胴の 2 種類の太鼓について、空気の振動音を採取し、以下の項目について分析を行った。

(1) スペクトルの時間変化
(2) いくつかのモードの成分比較
(3) 全体のエネルギー減衰特性
(4) モード (0,1) の時間変化
(5) モード (1,1) の時間変化
(6) その他のモードの時間変化

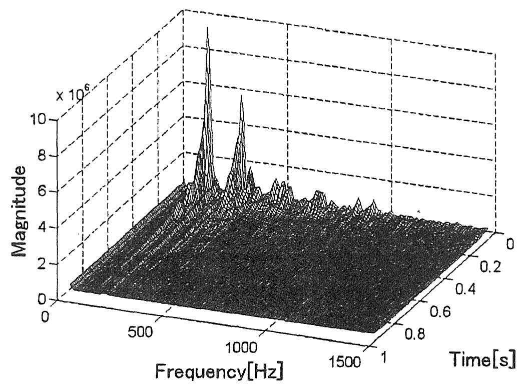
なお、分析に用いた条件は次の通りである。

- 分析に用いるディジタルデータ
  サンプリング周波数 : 44100Hz
  量子化ビット数 : 16 ビット
- 周波数分析に使用した条件
  FFT 点数 : 4096
  分析窓 : Hamming
  分析フレーム間隔 : 10ms

4・2 スペクトルの時間変化



(a) 欅胴



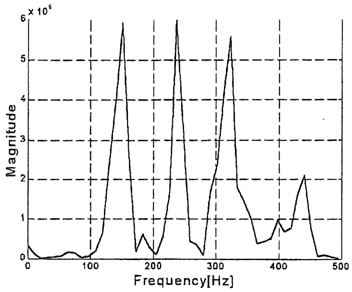
(b) アルミ胴

図 6: 太鼓の時間-周波数特性

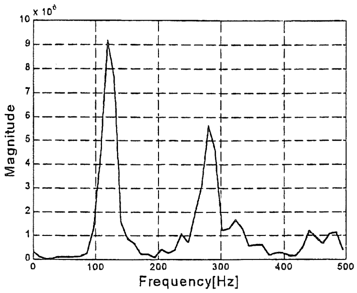
最初に 2 種類の太鼓の音を FFT によって分析した結果を図 6 に示す。欅胴に比べてアルミ胴の方が低周波側のスペクトル成分が乏しいことが読みとれる。全体を把握する場合、図 6 の表現は便利であるが、個々のモードを詳細に議論するには向いていない。個別の振動モードについては次節で扱う。

4・3 低次モード成分の比較

図 6 に示した時間-周波数特性のうち初期の低周波成分を取り出してプロットしたものが図 7 である。こ



(a) 欅胴



(b) アルミ胴

図 7: 低次モードの成分

れらの主要な成分は**2.** で述べた固有振動成分のうち、低次のいくつかに相当している。

ここで用いた 2 種類の太鼓、すなわち欅胴とアルミ胴の構造上の違いの一つは言うまでもなく胴の材質である。しかし音響学上、振動波形の基本的な性質を大きく左右する他のパラメータ、例えば

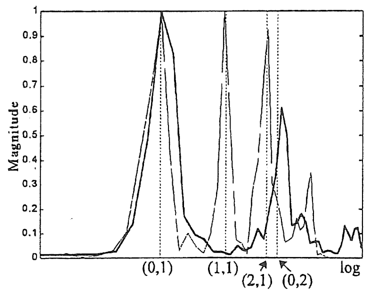
- 膜の半径 a
- 膜の張力 T
- 膜の密度 σ
- 胴の長さ l

などをそろえる配慮は特にされていない。したがって信号分析の結果を解釈する際、上掲の条件が異なっていることを念頭に置きつつ慎重に進めることが肝要である。

ところで**2.** で述べたように、円形膜のモード (0,1) の固有振動数は

$$\nu_{01} = 0.383\frac{1}{a}\sqrt{\frac{T}{\sigma}} \tag{12}$$

であることから、測定周波数を基本周波数 ν_{01} で規格化すれば、これは膜の半径 a、張力 T、密度 σ に依存しない量となる。このように図 7 を描き直したものが図 8 である。横軸は対数で表した周波数であり、固有振動モードを示してあるが、各モードにエネルギー成分が現れていることがわかる。特に欅胴ではモー



(細線:欅胴、太線:アルミ胴)

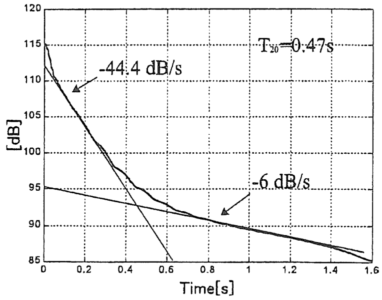
図 8: 低次モードの成分 (規格化)

ド (1,1) と (2,1) が優勢であり、反対にアルミ胴ではモード (0,2) の近傍が優勢であることが読みとれる。式 (12) は膜が理想条件、つまり

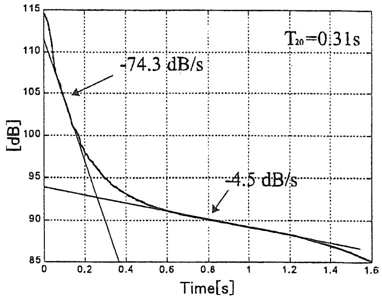
- 膜が完全に均質で
- 完全にたわみやすく
- 膜の張力はいたるところですべての方向に対して等しい

というときの固有振動数であり、実際の皮革の振動モードではピークが必ずしもモード周波数に一致しない。

4・4 全体の減衰特性



(a) 欅胴



(b) アルミ胴

図 9: 全体の減衰特性

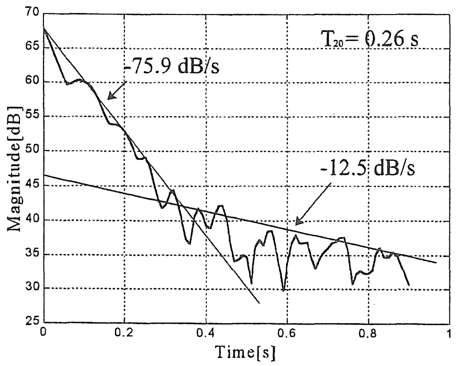
次に太鼓のエネルギーが時間とともに減衰する速さを数値で表した。減衰特性は図 9 (a) のように 2 つの部分から成り立っていることがわかり、それぞれの傾きは次のようになる。

- 初期の急な減衰部分　　-44.4 dB/秒
- 後半の緩やかな減衰部分　-6.0 dB/秒

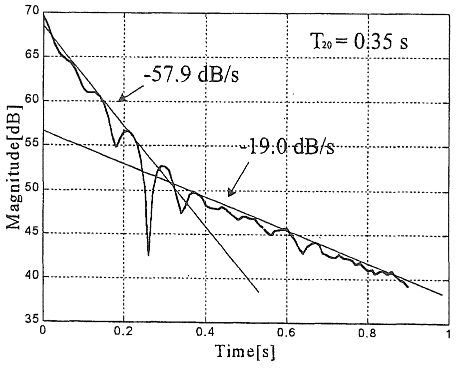
さらに太鼓のエネルギーが-20dB になる時間を T_{20} で表せば [9] この例では欅胴が $T_{20} = 0.47$ 秒であり、またアルミ胴では $T_{20} = 0.31$ 秒となっており、アルミ胴の方が減衰が速いことを示している。つまり、T_{20} の大小によって太鼓の音の減衰の速さを評価することができる。

4・5　振動モード (0,1)(基本周波数)

この振動モードは膜全体が同じ位相で振動するモードであり、最も低い周波数で振動する。



(a) 欅胴



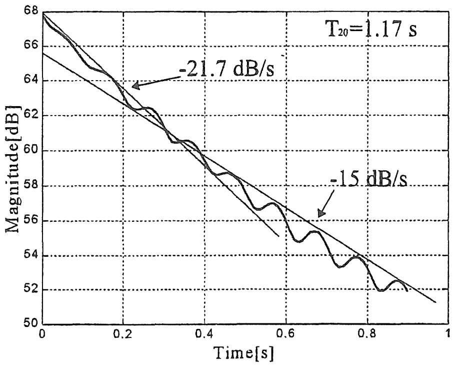
(b) アルミ胴

図 10: 振動モード (0,1) の減衰特性

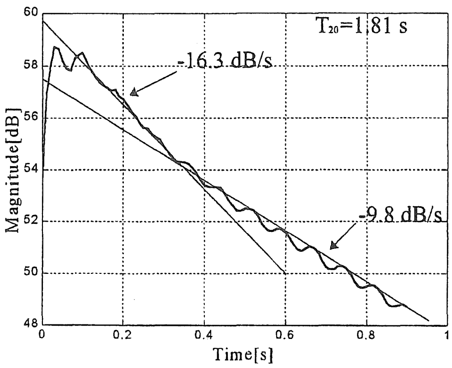
分析結果よりまず基本モードのモード (0,1) で振動エネルギーが大きいことがいえる。エネルギーが大であることから聴覚に及ぼす影響が大きいと思われるが、次の 2 点の理由から、それほどでない。

(1) 後述するモード (1,1) に比して振動の減衰が速いため ($T_{20} = 0.26$ 秒)、聴覚系に十分な刺激を与えることができない。
(2) 振動に規則的な唸りが見られないため、聴覚的には単純に聞こえる。

4・6　振動モード (1,1)



(a) 欅胴



(b) アルミ胴

図 11: 振動モード (1,1) の減衰特性

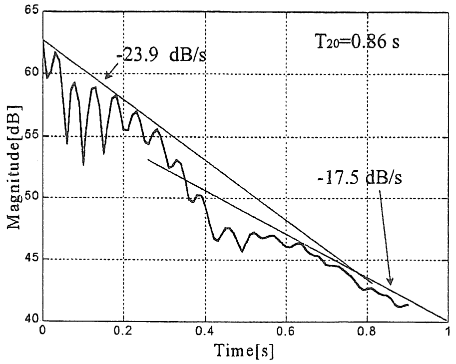
次にモード (1,1) の振動成分について考察する。図 8 から見られる緩やかなスペクトルの振動波形から膜の振動モード (1,1) における唸りの一つを取り上げて、その減衰特性を図 11(a) に表示する。約 10Hz の唸りの周波数が観測され、その振幅エンベロープの初期段階での減衰は-21.7 dB/s である。そして約 0.3 秒を過ぎると減衰は少し緩やかになって-15.0 dB/s になる。

このモードの分析結果は、基本モードと異なり、次のようになっている。

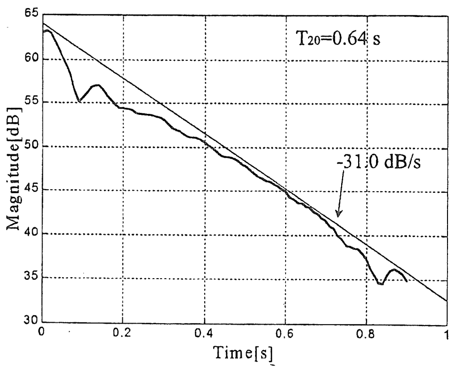
(1) 初期減衰が緩やかで振動波形は長時間持続する。($T_{20} = 1.17$ 秒)
(2) 約 10Hz の唸りを伴っている。

上の2つの結果は、基本モード(0,1)の結果とちょうど正反対であってともに太鼓の音を聴覚的により豊かにしていると推論される。このモードは1つの直径を節円とするため、膜の中心は振動しないと**2・1**で述べた。太鼓奏者の経験によればいわゆるよい音は、鼓面の中心から約10% 横に外れたポイントを叩くことにあるという。これはモード(0,1)よりもモード(1,1)等の高次モードの方が聴覚的に好まれることを示唆しており、ここでの推論を補強するものと考えられる。

4・7　その他の振動モード



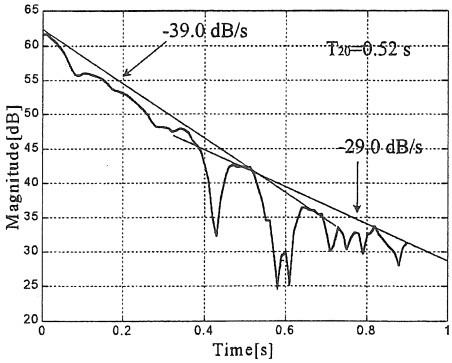
(a) 欅胴



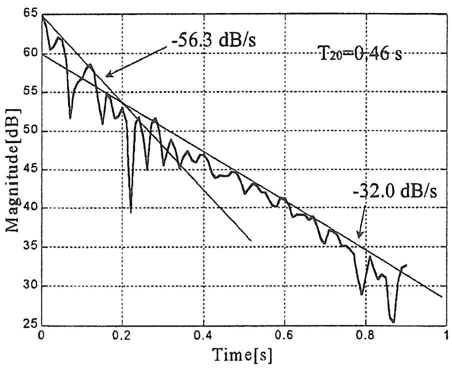
(b) アルミ胴

図 12: 振動モード(2,1)の減衰特性

次にその他のモードの振動成分について考察する。図12と図13はそれぞれ、モード(2,1)の減衰特性、モード(0,2)の減衰特性を示している。これらのモードの分析結果は、基本モードに比べて複雑な減衰特性を示している。特にモード(2,1)は減衰特性に2種類の振動成分を見いだすことができるように思われる。アルミ胴の減衰特性は傾きを1本の直線で表現できるが、単純なパラメータに置きかえる議論はモード(0,2)と同様に今後の問題としたい。図9〜13から求めた欅胴とアルミ胴の T_{20} の値を各モード順にプロットする

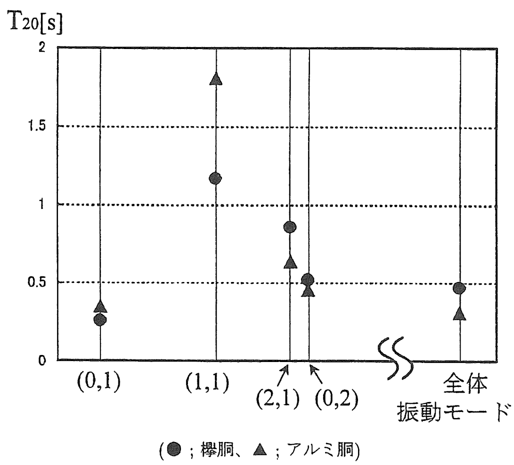


(a) 欅胴



(b) アルミ胴

図 13: 振動モード(0,2)の減衰特性



(● ; 欅胴、▲ ; アルミ胴)

図 14: 振動モード-減衰特性

と図 14 のようになる。この図からわかることは、アルミ胴ではモード (1,1) では大きな値を示しているが、他のモードでは欅胴の値に近い、あるいは下まわっている。いいかえると、欅胴に比してアルミ胴ではモード (1,1) の減衰が長いことが大きな特徴といえよう。

5. 結言

和太鼓の膜の振動を運動方程式から考慮した結果、2 枚の膜の連成振動となり、唸りを伴う振動波形を生じることが明らかになった。観測した太鼓の振動波形から唸りを最初に見いだしたのは OBATA ら[8] であるが、ここではその現象を膜の力学的な運動からも確認することができた。

また、実際の音響信号の分析からも膜に 1 つの節直径を伴う振動モード (1,1) に関して、連成振動に起因する唸りを認めることができた。しかし膜の基本振動であるモード (0,1) では顕著な唸りを見いだせなかった。

ここでは膜の振動理論解析に関して空気への放射インピーダンスは考慮しなかった。より厳密な解が要求される場合には、円形膜を等価的な円形ピストンに置き換えることなどにより膜の放射インピーダンスを定量的に取り扱うことによって、議論の精度をより高めることが可能になろう。

謝辞

本研究を遂行するに当たり、録音の機会を与えられた NHK 中部ブレーンズ 吉田光男 事業部長、および川合良三 部長プロデューサー に深謝します。

またアルミ胴の太鼓を提供された 日本アサヒ厨機 鬼頭一雄氏、ならびに 押切電機株式会社 岡田重雄氏、さらに、和太鼓の演奏にご協力いただいた 高鷲太鼓保存会 服部勝利氏 に感謝します。

参考文献

1) 広辞苑 : p.1539 , 岩波書店 , 東京 , 1991.
2) 古事記 : p.272 , 岩波書店 , 東京 , 1991.
3) 梵和大辞典 : p.589 , 講談社 , 東京 , 1979.
4) 源氏物語 (1) : p.239 , 岩波書店 , 東京 , 1965.
5) 続日本紀 (巻三十六) : p.146 , 岩波書店 , 東京 , 1998.
6) 西山静男 他 : 音響振動工学 , p.92 , コロナ社 , 1979.
7) 砂川恵訳 : 電子計算機活用のための振動解析の議論と応用 (上) , p.90 , ブレイン図書出版 , 東京 , 1984.
8) J.OBATA and T.TESIMA , "Experimental Studies on the Sound and Vibration of Drum." Journal of Acoustics Society of American , Vol.6 , April , p.267-274 , 1935.
9) 安藤繁雄 , 山口公典 : 鼓の音響学的研究 , 日本音響学会誌 , vol.41 , No.6 , 1985.

（受理　平成11年 3 月20日）