

3次モーメントによる画像の非対称性評価法 Evaluation of Image Symmetry Using 3rd Order Moments

井上 貴夫†
Takao INOUE

村上 剛†
Takeshi MURAKAMI

徐 平平‡
Pingping XU

井 研治†
Kenji INOMOTO

Abstract This paper states about a method to evaluate image symmetry by applying 3rd order moment which is used mainly to discuss probability distribution. The 3rd order moment shows a useful properties of shift and rotation invariant. And this value becomes to zero in case that the analyzed figure is a regular polygon. So, this measure is applicable in pattern recognition to distinguish regular polygon from others.

1. はじめに

画像処理の研究の大まかな流れは、情報の抽出の高度な判断をコンピュータにさせることにより、より知的で柔軟な画像処理システムを構築する方向に進んでいる。本テーマでは、ある特定の画像に対する画像処理システムにおいて高次モーメントによって定量化された特徴が画像の識別を行う際の有効な判断材料となり得るかどうかについての検討を行った。本稿では、まず図形の上下および左右の対称性の尺度化を試みる。尺度化するにあたっては、2値画像の場合のハミング距離や連続的な濃淡画像を考える場合の偶奇関数といった方法が挙げられるが、ここでは、図形の対称性を表す尺度として3次モーメントを提案する¹⁾。重心を基準にした場合、3次モーメントがシフト不変、回転不変の性質を保持していることを述べ、これが多角形を正多角形とそれ以外に分離可能な尺度として利用できることを示す。

2. 図形の対称性の尺度化

xy 平面の有限な領域($a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$)に存在する濃淡画像を $f(x, y)$ で表す。但し、

$$0 \leq f(x, y) \leq A \quad (1)$$

である。簡単のため $f(x, y)$ は x, y 方向に走査されているものとし、またこの画像はモノクロームであると仮定して話を進める。

次に画像を分析する際の基準点の一つを選び、これを g_x, g_y で表す。この選び方はいく通りか考えられる。

例えば、画像に依存しない量として、

< 1 > x, y の原点 $(0, 0)$ 、

< 2 > 分析領域の中央、すなわち、
 $\{(b-a)/2, \{d-c\}/2\}$

また、画像を分析して得られる値には、

< 3 > 画像の中心

などが考えられる。ここでは、この基準点の選び方については詳しく言及しないが、画像の重心を念頭に置いて議論を進める。このように、 $f(x, y)$ と g_x, g_y が与えられたとき、画像の対称性(あるいは非対称性)を示す尺度について考察を進めてゆく。

2.1 偶関数と奇関数

画像 $f(x, y)$ の $y = y_1$ における走査信号を簡単のため $f(x)$ で表すことにする。今、信号 $f(x)$ があり、分析範囲内に座標の原点があるものとすると、この関数は次のように偶関数 $f_e(x)$ と奇関数 $f_o(x)$ に分解できる²⁾。

$$f(x) = f_e(x) + f_o(x) \quad (2)$$

但し

$$f_e(x) = \{f(x) + f(-x)\}/2 \quad (3)$$

$$f_o(x) = \{f(x) - f(-x)\}/2 \quad (4)$$

ここで $f_e(x)$ は $f(x)$ の偶関数成分を、また $f_o(x)$ は $f(x)$ の奇関数成分を表しており、これらの値から x 方

†愛知工業大学 情報通信工学科(豊田市)

‡中国東南大学無線電工程系通信研究室(南京市)

向の非対称性の尺度として、例えば、次の値を考えることができる。

$$\gamma_x = \sqrt{\frac{\int_a^b f_o(x)^2 dx}{\int_a^b f_e(x)^2 dx + \int_a^b f_o(x)^2 dx}} \quad (5)$$

一方、 $f_e(x)$ と $f_o(x)$ はフーリエ変換の実、虚部に等しいから、

$$F_e(\omega) = \text{Re}[F(\omega)] \quad (6)$$

$$F_o(\omega) = \text{Im}[F(\omega)] \quad (7)$$

となる。但し、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi\omega x} dx \quad (8)$$

$$F_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(x)e^{-j2\pi\omega x} dx \quad (9)$$

$$F_o(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_o(x)e^{-j2\pi\omega x} dx \quad (10)$$

である。ここで、積分範囲は $f(x)$ の性質から $a \sim b$ に置き換えることができる。

このようにして、フーリエ変換を用いて非対称性の尺度化が可能であるが、対称の基準点には $1 >$ の x, y 原点を採用していることになる。これは同一図形であっても、分析領域内の平行移動に対して、その尺度が影響される欠点をともなうため、このままでは画像の分析に適さない。

2.2 ハミングの距離

画像 $f(x, y)$ に2値画像に限定される場合、走査された信号 $f(x, y_1)$ を基準点 (g_x, g_y) に関して折り返したとき、左右(あるいは上下)のハミング距離³⁾を用いて、非対称性を表すことが考えられる。

$$H = \sum_{k=0}^{n-1} f(x+g_x-k\Delta, y_1) \cdot f(x+g_x+k\Delta+1, y_1) \quad (11)$$

但し

$$f(x, y) = \{0, 1\}$$

Δ : 画像の走査ステップ

H : ハミングの距離

n : ハミングの距離を計算するデータ数

である。この場合、適用可能な画像は2値画像に限定される。

3. n 次モーメント

ここでは非対称性の尺度として n 次モーメントを用いる。まず、 $f(x, y) \geq 0$ であることから $y = y_1$ での走査信号 $f(x, y_1)$ の $x = x$ から $x = x + \Delta x$ における確率密度を考える。これは

$$\frac{f(x, y_1)\Delta x}{\int_a^b f(x, y_1)dx} \quad (12)$$

で与えられる。したがって、 $(x - g_x)^n$ の期待値、すなわち g_x に関する n 次モーメントは次式で与えられる。

$$\frac{\int_a^b (x - g_x)^n f(x, y_1)dx}{\int_a^b f(x, y_1)dx} \quad (13)$$

この n 次モーメントは対称の基準点が原点に固定されることがない。したがって、 g_x として画像の重心などを用いれば、いわゆる時系列信号におけるシフト不変であり、画像分析に大変都合がよい。また、ハミングの距離のように2値画像に限定されることもなく、一般の濃淡画像にも応用可能である特長を有している。

一本の走査線に関し、このようにして導入される高次モーメントを全ての走査線に関しこれを平均し、画像全体についての非対称性の尺度化することを試みる。

4. Skewness

4.1 3次モーメントとskewness

走査線 $f(x, y_1)$ の $x = g_x$ 周りの n 次モーメントは式(13)のようになる。一方、濃淡画像の各走査線についての積分値は、

$$\int_a^b f(x, y_1)dx \quad (14)$$

となり、これは $f(x, y) \geq 0$ より、非負である。各走査線について得られる(13)を(14)を重みとして y 方向に積分すると次式のようになる。

$$\int_c^d \int_a^b (x - g_x)^n f(x, y) dx dy \quad (15)$$

このようにして得られた値、つまり各走査線をその積分値に比例する重みで加え合わせた値は、 g_x に関する画像の x 方向の性質を反映した尺度の一つになっている。したがって、 $x = g_x$ および $y = g_y$ 周りの平均のモーメントは(16),(17)のように表現する事ができる。

$$\mu_n = \int_c^d \int_a^b (x - g_x)^n f(x, y) dx dy \quad (16)$$

$$\lambda_n = \int_a^b \int_c^d (y - g_y)^n f(x, y) dy dx \quad (17)$$

さて、skewnessは(18)で表わされるように、3次モーメントを2次モーメントの3/2乗で規格化したもので定義されている⁴⁾。

$$skewness = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \quad (18)$$

ここで、 x 、 y 方向の各走査線について g_x あるいは g_y からの標準偏差 σ_x 、 σ_y は(16)、(17)において $n=2$ の場合に相当するから、

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \mu_2 \\ \sigma_y^2 &= \lambda_2 \end{aligned} \quad (19)$$

となる。この表現を用いれば、それぞれの方向のskewness γ_x 、 γ_y を次式で定めることができる。

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} \\ \gamma_y &= \frac{\lambda_3}{\sigma_y^3} \end{aligned} \quad (20)$$

2で述べたように、基準点には種々の値を用いることができるが、本稿においては画像の基礎的な尺度として、式(21)に示すように画像 $f(x, y)$ の重心を用いる。

$$g_x = \mu_1 \quad (21)$$

$$g_y = \lambda_1$$

このように2次モーメントで規格化した3次モーメント、つまりskewnessによって画像の性質を評価することを試みる。

4.2 簡単な図形におけるskewness

これまで述べてきたことは、画像 $f(x, y)$ を、濃淡画像として説明してきたが、2値画像にもそのまま適用できる。さて、単純な画像に対して(20)で与えられるskewnessはどのようなふるまいを示すのであろうか。一番簡単な図形として正3角形を選び、これが2値画像で表された場合について、先ほど定めたskewnessの γ_x のふるまいを導いてみよう。ここで α は正3角形の重心から底辺に下ろした垂線と y 軸となす角度であって、この3角形は図1のように角度 α だけ回転しているものとする。また、 h は正3角形の高さである。

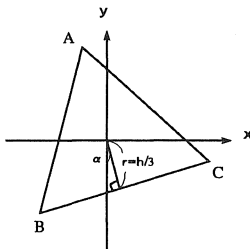


図1 正3角形の回転

さて、図1の正3角形の3辺を各々、数式で表すと次のようになる。

$$AB : y_1 = x \tan(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \frac{r}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})}$$

$$BC : y_2 = x \tan \alpha - \frac{r}{\cos \alpha} \quad (22)$$

$$CA : y_3 = x \tan(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \frac{r}{\cos(\alpha - \frac{\pi}{3})}$$

これを用いると、正3角形の頂点の x 座標はそれぞれ次のようになる。

$$x_a = -2r \sin \alpha$$

$$x_b = 2r \sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) \quad (23)$$

$$x_c = 2r \sin(\alpha + \frac{\pi}{3})$$

したがって、正3角形の3次モーメントは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \int_{x_b}^{x_a} (y_1 - y_2)x^3 dx + \int_{x_a}^{x_c} (y_3 - y_2)x^3 dx \\ &= \int_{2r \sin(\alpha - \frac{\pi}{3})}^{-2r \sin \alpha} \frac{\sqrt{3}}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) \cos \alpha} \\ &\quad \times (\frac{x}{2} + r \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}))x^3 dx \\ &\quad + \int_{-2r \sin \alpha}^{2r \sin(\alpha + \frac{\pi}{3})} \frac{\sqrt{3}}{\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) \cos \alpha} \\ &\quad \times (\frac{-x}{2} + r \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}))x^3 dx \\ &= \frac{3\sqrt{3}r^5}{5} \sin 3\alpha \end{aligned} \quad (24)$$

同様に μ_2 を求め、(20)を用いると x 方向のskewness γ_x は次式で表される

$$\gamma_x = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{30h} \sin 3\alpha \quad (25)$$

したがって正3角形をその重心を中心に角度 α だけ回転させたとき、 x 方向のskewness γ_x は図2のようなふるまいをなす。

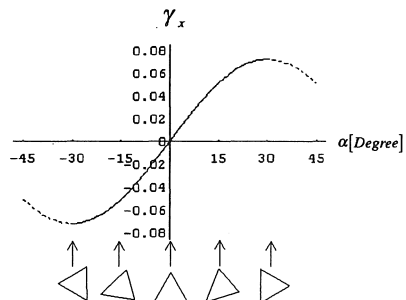


図2 正3角形の角度とskewness

$\alpha = 0$ の場合、すなわち辺 BC が x 軸に平行に置かれた場合は $\gamma_x = 0$ となり、図形が左右対称であることを表している。 α を増加するにつれて γ_x も大きくなり、非対称性の尺度、つまり γ_x は増加する。そしてこの場合、図形は重心より右側の面積が大きくなるために正の値をとる。この傾向は $\alpha = 30$ 度で最大となり、 $\alpha > 30$ 度では γ_x が減少に転じる。

同様に、 α が負のとき、 α が小さくなるにつれ、非対称性が增加する。しかし、重心の左側の面積が大きくなるために、 γ_x は負の値をとる。考察に用いた図形は正3角形なので、 y 方向の skewness γ_y は x 方向の skewness γ_x と $\pi/6$ の差で同様の性質を示す。

4.3 3次モーメントの線形性

正3角形の場合の skewness を求めたが、より複雑な図形からは基本となる小部分に分割できれば考察が容易に進められる。そのため、次に skewness を定めている3次モーメントをとりあげ、その3次モーメントの基本的性質について述べることにする。まず、互いに共通部分を持たない図形 $f(x, y)$ 、 $g(x, y)$ を考える。これらの共通の規準点に対し、3次モーメントを求める演算子を M_I とする。この時、図形 $f(x, y)$ と $g(x, y)$ の和の図形についての3次モーメントは、

$$\begin{aligned}
 &M_I[f(x, y) + g(x, y)] \\
 &= \int_c^d \int_a^b [x \sin \theta - y \cos \theta]^3 [f(x, y) + g(x, y)] dx dy \\
 &= \int_c^d \int_a^b [x \sin \theta - y \cos \theta]^3 f(x, y) dx dy \\
 &+ \int_c^d \int_a^b [x \sin \theta - y \cos \theta]^3 g(x, y) dx dy \\
 &= M_I[f(x, y) + M_I[g(x, y)] \tag{26}
 \end{aligned}$$

となる。つまり、ある図形の3次モーメントはその図形の共通部分を持たない和に分割した各々の3次モーメントの和に等しい。ここでは濃淡画像を念頭において議論を進めているが、2値画像の場合、和の演算は共通部分を持たないことを考え合わせると論理和、あるいは排他的論理和に置き換えることができる。このように3次モーメントは共通部分を持たないという条件付きで線形性が成立しており、この性質は基礎的な解析に極めて有用となる。しかし、(18)で定められる skewness には線形性を期待することはできず、画像の尺度として skewness を用いて解析を進めることは極めて困難である。そのため、以後は skewness を算定する基礎となる3次モーメントによって画像の非対称性を表すことを考え、その基本的な性質について考察を進めることにする。

5. 正 n 角形の3次モーメント

正 n 角形をその重心が $x-y$ 平面の原点と一致するように配置したとき、 y 軸周りの3次モーメントについて考察する。ここで、前節で示した3次モーメントの線形性から、正 n 角形は n 個の2等辺三角形に分割できることを用いて議論を進める。

5.1 正偶数角形の3次モーメント

ある画像が部分画像の和に分解できれば、その3次モーメントは分解された画像の3次モーメントの和に等しいことから、例えば、図3に示すような、正4角形、あるいは正8角形を考えると、簡単な図形（リボン形）に分割して考えることにする。

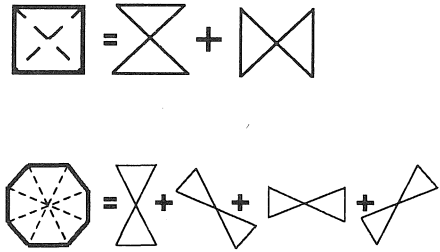


図3 正 $2n$ 角形の分解

これらのリボン形の重心はすべて、全体の画像の重心と一致している。このリボン形の3次モーメントを求め、線形性を適用すれば、正偶数角形の3次モーメントを求めることができる。これを図4を用いて考えてみる。

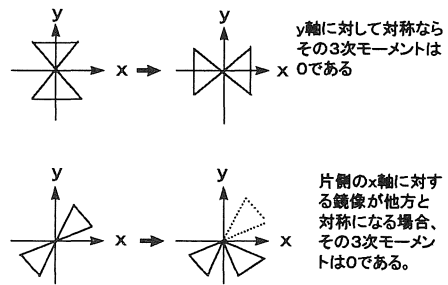


図4 リボン形の3次モーメント

図形が原点に対して対称であれば、これは3次モーメントが0となることの十分条件であることから、図4の3次モーメントは明らかに0となる。つまり、リボン形の x 軸の正領域を x 軸に関して鏡像変換を施しても、 y 方向の3次モーメント γ_y には影響しない。このような

変換を施せば、リボン形はy軸に対して線対称にできるから、このときの3次モーメントは0になる。このように、正偶数角形は互いに共通部分を持たないリボン形の和に分解できることから、次に全体の3次モーメントについて考察する。これは分解したリボン形の和になるから4.3で述べた線形性より、全体の3次モーメントは、 2π を角度 $2\pi/n$ おきき求めたリボン形の3次モーメントの総和に等しい。ところで、個々のリボン形の3次モーメントは上述の通り0であったから、正偶数角形の3次モーメントは図形の回転角に関わらず0になることが予想される。

5.2 正奇数角形の3次モーメント

次に正奇数角形の場合について考察する。正奇数角形の場合は先ほど示した、正偶数角形のように簡単な図形(リボン形)を用いて示すことができない。ところで、正n角形は図5のようにその角数と同じ2等辺3角形に互いに重なることなく分割できる。

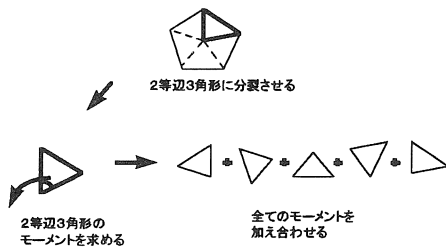


図5 奇数角形の3次モーメントを求める過程

よって、ここでは先ず、2等辺三角形の頂点周りの3次モーメントを求め、次にこれをn個加えることにより、正奇数角形の3次モーメントを求める。まず、図6のような2等辺三角形を考える。 θ は2等辺三角形の回転角、 β は2等辺のなす角度、 r は2等辺三角形の高さである。ここでは正n角形の一辺ACがy軸と平行になる場合を θ の基準に選んでいるため、図1の回転角 α とは90度の差がある。このように、原点にその2等辺をなす頂点があり、原点を中心に回転する2等辺三角形の3次モーメント $M_o(\theta, \beta, r)$ を求める。ここで、図6の2等辺の3辺を表す式はそれぞれ、

$$\begin{aligned} AB : y_1 &= x \tan(\theta + \frac{\beta}{2}) \\ BC : y_2 &= x \tan(\theta - \frac{\beta}{2}) \\ CA : y_3 &= -x \cot \theta + r \csc \theta \end{aligned} \quad (27)$$

であることから、これらの交点A、Cのx座標 x_a 、 x_c は、

$$x_a = r \cos(\theta + \frac{\beta}{2}) \sec \frac{\beta}{2} \quad (28)$$

$$x_c = r \cos(\theta - \frac{\beta}{2}) \sec \frac{\beta}{2} \quad (29)$$

で与えられる。これより、2等辺三角形の3次モーメント $M_o(\theta, \beta, r)$ は

$$\begin{aligned} M_o(\theta, \beta, r) &= \int_0^{x_a} x^4 \sec^5(\frac{\beta}{2} + \theta) \sec(\frac{\beta}{2} - \theta) \sin \beta dx \\ &+ \int_{x_a}^{x_c} (-x^4 \cos \frac{\beta}{2} \csc \theta \sec(\frac{\beta}{2} - \theta) + x^3 r \csc \theta) dx \\ &= \frac{r^2 \sec^3 \frac{\beta}{2}}{20} (3 \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{3\beta}{2}) \cos \theta \\ &+ \frac{r^2 \sec^3 \frac{\beta}{2}}{20} (2 \sin \frac{3\beta}{2} - 2 \sin \frac{\beta}{2}) \cos 3\theta \\ &= C_1(\beta, r) \cos \theta + C_2(\beta, r) \cos 3\theta \end{aligned} \quad (30)$$

となる。

但し

$$\beta = 2\pi/n \quad (31)$$

$$C_1(\beta, r) = \frac{r^2 \sec^3 \frac{\beta}{2}}{20} (\sin \frac{3\beta}{2} + 3 \sin \frac{\beta}{2}) \quad (32)$$

$$C_2(\beta, r) = \frac{r^2 \sec^3 \frac{\beta}{2}}{20} (\sin \frac{3\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2}) \quad (33)$$

である。

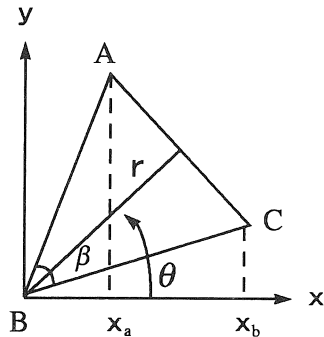


図6 2等辺三角形の3次モーメント

このようにして、2等辺三角形の3次モーメントを求めることができた。さて、正n角形(n; 奇数)ではn個の2等辺三角形の和に分解できることから全体の3次モーメントは、 θ を

$$\begin{aligned} \theta &= \theta + \beta \\ &= \theta + \frac{2\pi}{n} \end{aligned} \quad (34)$$

ずつ増加させながら、n個の2等辺三角形の3次モーメントを求め、これを加え合わせれば得られる。結局、正n角形(n; 奇数)の3次モーメント $Poly(\theta, n, r)$ は次式のように表せる。

$$Poly(\theta, n, r) = \sum_{i=0}^{n-1} M_o(\theta + \frac{2\pi}{n}i, \frac{2\pi}{n}, r) \quad (35)$$

これを用いて、例えば、正5角形の3次モーメントを数値計算すると、

$$Poly(\theta, 5, r) = 0 \quad (36)$$

となる。また、5.1で述べた正 $2n$ 角形についても

$$Poly(\theta, 4, r) = 0 \quad (37)$$

のようになる。

従って、正 n 角形の3次モーメントをまとめて記すと、

$$Poly(\theta, n, r) = \begin{cases} \frac{-3\sqrt{3}r^5}{5} \cos 3\theta & (n=3) \\ 0 & (n \geq 4) \end{cases} \quad (38)$$

となることが明らかになった。

6. まとめ

本稿では提案する *skewness* がどのような変化をするかを、一例として正3角形を傾けた場合について示し、図形の角形が増えるなどどのようなかを考察した。また、ここでは図形を2値画像として説明してきたが、これは濃淡画像へもそのまま応用できる。そして、考え方としては以下の3つの条件を前提としてきた。

1. 座標系が決定していること。

2. 規準となる座標 (例えば重心) が決定している。

3. 各走査線の *skewness* は走査線の面積を重みとして考慮する。

これらの条件の元で、図形の対称性が尺度化でき、非対称性が数値化できることになる。また、重心から測定した3次モーメントは正3角形を除いてすべて0となる結果を得た。これからの結果は4角形以上の多角形を正多角形とそれ以外に分類できる尺度として利用することを示唆しており、今後の応用が期待される。

参考文献

- 1)井上 貴夫、村上 剛、井 研治; 3次モーメントによる2次元信号の非対称性評価法、平成8年度電気関係学会東海支部連合大会 No.814 (1996)
- 2)E.O.Brigham;The Fast Fourier Transform Prenticehall p.42 (1974)
- 3)L.E.フランクス(猪瀬 他訳) 信号理論 産業図書 p.20 (1974)
- 4)H.Cramer;Mathematical Method of Statistics p.183, Princeton Univ. Press(1961)

(受理 平成9年3月21日)